М.О. Боровий
О.Я. Оліх

Задачі з фізики для студентів природничих факультетів.
Механіка та молекулярна фізика

Частина 1. Механіка

Основні формули

Миттєва швидкість руху

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad V = \frac{ds}{dt},$$

де $\vec{r}$ –радіус-вектор тіла, t –час, s – шлях; у свою чергу, шлях який пройшло тіло за час t

$$s = \int_0^t V\,dt = \int_0^t \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}\,dt,$$

де V_x, V_y, V_z – компоненти вектора миттєвої швидкості.

Прискорення матеріальної точки

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2},$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

де a_τ – тангенційне прискорення, a_n – нормальне прискорення.

Тангенційне прискорення

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Нормальне прискорення

$$a_n = \frac{V^2}{R},$$

де R – радіус кривизни траєкторії.

При рівнозмінному прямолінійному русі

$$a = \text{const}, \quad V = V_0 \pm at, \quad s = V_0 t \pm \frac{at^2}{2},$$

де V_0 – початкова швидкість.

Кутова швидкість

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt},$$

де φ – кут повороту. Напрямок вектора $d\vec{\varphi}$ визначається правилом правого гвинта.

Кутове прискорення

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} =, \quad \beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Зв'язок між лінійними та кутовими величинами

$$\vec{V} = [\vec{\omega}\vec{R}], \quad a_\tau = \beta R, \quad a_n = \omega^2 R.$$

Сили, що розглядаються в механіці

а) сила пружності

$$F = k\,\Delta x,$$

де k – коефіцієнт пружності, $\Delta x = \left(x - x_0\right)$ – абсолютна деформація, x_0 і x – початкова і кінцева довжини деформованого тіла, відповідно;

б) сила гравітаційної взаємодії

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

де γ – гравітаційна стала, m_1 і m_2 – маси взаємодіючих точкових тіл, r – відстань між тілами;

в) сила тяжіння поблизу поверхні Землі

$$F = m\,g,$$

де g – прискорення вільного падіння, m – маса тіла;

г) сила тертя ковзання

$$F = \mu\,N,$$

де μ – коефіцієнт тертя, N – сила нормального тиску.

Механічна робота

$$dA = \vec{F}\,d\vec{r},$$

де $d\vec{r}$ – вектор переміщення.

Робота сили $d\vec{F}$ при кінцевому переміщенні $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F_r dr,$$

де F_r – проекція сили на вектор переміщення.

Потужність

$$P = \frac{dA}{dt};$$

якщо сила не залежить від часу, то

$$P = \frac{d}{dt}(\vec{F}\vec{r}) = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{V}.$$

Імпульс тіла масою m, що рухається зі швидкістю **V**

$$\vec{p} = m\vec{V}.$$

Другий закон Ньютона

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

де $\vec{F}$ – рівнодіюча сил, що діють на тіло масою m.

Другий закон Ньютона в імпульсній формі

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Закон збереження імпульсу для ізольованої системи

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \text{const},$$

де n – кількість тіл, що входять до системи.

Кінетична енергія тіла, зумовлена поступальним рухом

$$T = \frac{1}{2} m V^2.$$

Потенціальна енергія

а) пружнодеформованого тіла

$$\Pi = \frac{1}{2} k \left(\Delta x\right)^2;$$

б) гравітаційної взаємодії

$$\Pi = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r};$$

в) тіла, що знаходиться в полі сили тяжіння

$$\Pi = m g h.$$

Закон збереження механічної енергії: повна механічна енергія ізольованої системи, в якій не діють сили тертя, не змінюється з перебігом часу

$$E = \Pi + T = \text{const}.$$

Якщо система не ізольована і зовнішні сили виконують роботу $A_{\text{зовн}}$, а сили тертя – роботу $A_{\text{терт}}$, то

$$\Delta E = A_{\text{зовн}} + A_{\text{терт}}.$$

Рівняння динаміки руху матеріальної точки масою m, що рухається зі швидкістю $\vec{V}'$ відносно неінерціальної системи відліку, яка, в свою чергу, обертається з постійною кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ відносно осі, що переміщується поступально з прискоренням $\vec{a}_0$

$$m\vec{a}' = \vec{F} + m\omega^2 \vec{r} + 2m[\vec{V}' \vec{\omega}] - m\vec{a}_0,$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор матеріальної точки відносно осі обертання неінерціальної системи відліку, $\vec{F}$ – рівнодіюча усіх реальних фізичних сил, що прикладені до тіла.

Момент інерції тіла відносно осі обертання

$$I = \int_m r^2 dm = \int_\upsilon r^2 \rho \, d\upsilon,$$

де r – відстань до осі обертання, ρ – густина тіла, υ – об’єм тіла.

Теорема Штейнера-Гюйгенса

$$I = I_0 + md^2,$$

де I_0 – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через його центр мас, I – момент інерції відносно паралельної осі, яка знаходиться на відстані d від першої, m – маса тіла.

Момент імпульсу (момент кількості руху) матеріальної точки відносно точки (полюсу)

$$\vec{L} = [\vec{r}\,\vec{p}],$$

де $\vec{r}$ – радіус вектор матеріальної точки відносно деякої початкової точки (полюса); $\vec{p}$ – імпульс матеріальної точки.

Момент сили відносно даної точки

$$\vec{M} = [\vec{r}\,\vec{F}],$$

де $\vec{r}$ – радіус вектор точки прикладання сили відносно полюса.

Основне рівняння динаміки обертального руху відносно осі обертання (вісь OZ)

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d(I_z\,\omega_z)}{dt}.$$

Закон збереження моменту імпульсу ізольованої системи тіл, які обертаються навколо нерухомої осі

$$\sum_{i=1}^{n} I_i \omega_i = \text{const},$$

де I_i – момент інерції i-го тіла системи відносно осі обертання, ω_i – кутова швидкість i-го тіла відносно цієї осі.

Кінетична енергія тіла, зумовлена обертальним рухом

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Перетворення Лорентца

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + x'V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

де штрихи відносяться до просторово-часових координат системи, що рухається відносно нерухомої системи зі швидкістю V вздовж осі OX; c – швидкість світла у вакуумі.

Власна система відліку – система відліку, відносно якої тіло нерухоме. Лабораторна система відліку – система відліку нерухома відносно спостерігача. В лабораторній системі відліку довжина l тіла, яке рухається зі швидкістю V в напрямку довжини, пов'язана з його довжиною l_0 у власній системі відліку співвідношенням (лорентцеве скорочення довжини)

$$l = l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}\ .$$

Проміжки часу τ в лабораторній системі відліку і τ_0 у власній системі відліку пов'язані між собою наступним чином (лорентцеве сповільнення часу)

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\ .$$

Релятивістський імпульс тіла

$$\vec{p} = \frac{m_0\,\vec{V}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\ ,$$

де m_0 – маса спокою.

Повна механічна енергії вільної частинки

$$E = \frac{m_0\,c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\ .$$

Енергія спокою

$$E_0 = m_0 c^2\ .$$

Кінетична енергія вільної частинки

$$T = E - E_0 = \frac{m_0\,c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - m_0\,c^2\ .$$

Зв'язок між повною енергією вільної частинки та релятивістським імпульсом

$$E^2 - p^2c^2 = m_o^2c^4\ .$$

Приклади розв'язку задач

Приклад 1. *Тіло кинули вертикально вгору з початковою швидкістю $V_0 = 4\ м/с$. Коли воно досягло найвищої точки, з тієї ж самої початкової точки з тією ж швидкістю вертикально вгору кинули інше тіло. На якій відстані h від початкової точки зустрінуться тіла? Опір повітря не враховувати.*

$V_0 = 4$ м/с
h - ?

Розв'язок:

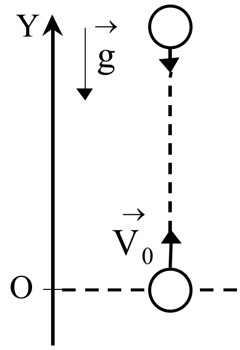

Рис.1.1.

Нехай початок системи відліку співпадає з початковою точкою. Спрямуємо координатну вісь OY вертикальну вгору. В цій системі відліку спочатку знайдемо, скільки часу буде підніматися на максимальну висоту перше тіло. Рух тіла рівнозмінний, з прискоренням, що чисельно дорівнює прискоренню вільного падіння g; напрямок початкової швидкості співпадає з напрямком осі OY, а напрямок прискорення g є протилежним. В цьому випадку залежності швидкості V_1 і координати точки положення y_1 першого тіла від часу описуються рівняннями:

$$V_1(t) = V_0 - g\,t, \tag{1}$$

$$y_1(t) = V_0 t - \left(g\,t^2\right)/2. \tag{2}$$

В рівнянні (2) враховано, що в момент часу $t = 0$ тіло перебувало в точці $y = 0$.

У точці максимального підйому швидкість тіла дорівнює нулю, тобто у цей момент часу ($t = t_п$):

$$V(t_п) = V_0 - g\,t_п = 0,$$

отже

$$t_п = V_0/g. \tag{3}$$

Закон зміни координати другого тіла також можна описати залежністю, схожою на рівняння (2), тільки необхідно врахувати, що рух цього тіла розпочався на час $\Delta t = t_п$ пізніше. А саме

$$y_2(t)=V_0(t-t_п)-\frac{g(t-t_п)^2}{2},\quad t\geq t_п. \tag{4}$$

Тіла зустрінуться у момент часу $t=t_0$ коли $y_1(t_0)=y_2(t_0)$. Тобто, з врахуванням (2) та (4), маємо

$$V_0t_0-\frac{gt_0^2}{2}=V_0(t_0-t_п)-\frac{g(t_0-t_п)^2}{2}.$$

Розв'язуючи останнє рівняння відносно t_0, отримуємо:

$$t_0=\frac{3V_0}{2g}. \tag{5}$$

Тоді висота h, на якій зустрінуться тіла

$$h=y_1(t_0)=V_0t_0-\frac{gt_0^2}{2}=\frac{3}{2}\frac{V_0^2}{g}-\frac{9}{8}\frac{V_0^2}{g}=\frac{3}{8}\frac{V_0^2}{g}. \tag{6}$$

Перевіримо розмірність отриманого виразу

$$[h]==\frac{(м/с)^2}{м/с^2}=м.$$

Використовуючи формулу (6), знаходимо

$$h=\frac{3}{8}\cdot\frac{4^2}{9.81}\approx 0.61\quad (м).$$

Приклад 2. *Точка рухається по колу, що має радіус $R=30$ см з постійним кутовим прискоренням. Знайти тангенційне прискорення точки $a_ф$, якщо відомо, що за час $t=4$ с вона зробила три оберти, а в кінці третього оберту її нормальне прискорення $a_n=2.7\ м/с^2$.*

$R=0.3$ м
$t=4$ с
$a_n=2.7\ м/с^2$
N=3
a_τ - ?

Розв'язок:

Під час руху точки по колу радіусом R її кутове прискорення β і тангенційне прискорення a_τ зв'язані співвідношенням

$$a_\tau=\beta R, \tag{1}$$

тобто, якщо кутове прискорення точки є сталим, то сталою залишається і величина a_τ. З іншого боку

$$a_{\tau} = \frac{dV}{dt}. \tag{2}$$

Таким чином, можна зробити висновок, що лінійна швидкість точки та пройдений нею шлях у даному випадку змінюються за законами рівноприскореного руху:

$$V = V_0 + a_{\tau} t, \tag{3}$$

$$S = V_0 t + \frac{a_{\tau} t^2}{2}, \tag{4}$$

де V_0 і V – швидкості точки у момент початку обертання та у момент його закінчення, відповідно; t – час, витрачений на N обертів, S – шлях, що пройшла точка при цьому:

$$S = 2\pi R N. \tag{5}$$

Прирівнюючи вирази (5) і (4), маємо

$$2\pi R N = V_0 t + \frac{a_{\tau} t^2}{2},$$

$$V_0 = \frac{2\pi R N}{t} - \frac{a_{\tau} t}{2}. \tag{6}$$

При русі по колу радіусом R нормальне прискорення a_n зв'язане з лінійною швидкістю співвідношенням

$$a_n = \frac{V^2}{R},$$

звідси

$$V = \sqrt{a_n R}. \tag{7}$$

Підставивши вирази (7) та (6) у рівність (3), в результаті отримуємо

$$\sqrt{a_n R} = a_{\tau} t + \frac{2\pi R N}{t} - \frac{a_{\tau} t}{2}$$

$$a_{\tau} = \frac{2}{t}\left(\sqrt{a_n R} - \frac{2\pi R N}{t}\right). \tag{8}$$

Перевіримо розмірність:

$$[a_\tau] = \frac{1}{с}\left(\left(м \cdot с^{-2} \cdot м\right)^{1/2} - \frac{м}{с}\right) = \frac{1}{с} \cdot м \cdot с^{-1} = м/с^2 .$$

Використовуючи формулу (8), знаходимо

$$a_\tau = \frac{2}{4}\left(\sqrt{2.7 \cdot 0.3} - \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 0.3 \cdot 3}{4}\right) \approx -0.26\ \left(м/с^2\right).$$

Від'ємне значення тангенційного прискорення означає, що швидкість точки з часом зменшується.

Приклад 3. *Матеріальна точка рухається по колу з постійною кутовою швидкістю* $щ_0 = 3$ *рад/с. В деякий момент часу у неї з'являється кутове прискорення* $в(t) = (1 - t)$ *рад/с²*. *Через який час t зупиниться дана матеріальна точка? Який шлях S вона пройде до повної зупинки? Радіус кола* $R = 1$ *м*.

Дано	Розв'язок
$\omega_0 = 3$ рад/с $\beta(t) = (1 - t)$ рад/с² $R = 1$ м t - ? S - ?	Зв'язок між кутовою швидкістю і кутовим прискоренням визначається співвідношенням $\omega = \int \beta\, dt + C$, де величина константи C визначається з початкових умов.

Розв'язок:

Зв'язок між кутовою швидкістю і кутовим прискоренням визначається співвідношенням

$$\omega = \int \beta\, dt + C ,$$

де величина константи C визначається з початкових умов. Для нашого випадку маємо

$$\omega = \int (1 - t)\, dt + C = t - \frac{1}{2}t^2 + C . \qquad (1)$$

Так як в момент часу $t = 0$ (момент, коли у точки з'явилося кутове прискорення), $\omega = \omega_0$, то з (1) випливає, що $C = \omega_0$. Таким чином, залежність кутової швидкості матеріальної точки від часу описується виразом:

$$\omega(t) = \omega_0 + t - \frac{1}{2}t^2 . \qquad (2)$$

Матеріальна точка зупиниться, коли її швидкість буде рівна нулеві, тобто для моменту зупинки ($t = t_3$) справедливим є співвідношення

$$\omega(t = t_3) = \omega_0 + t_3 - \frac{1}{2}t_3^2 = 0 . \qquad (3)$$

Підставляючи числові значення та розв'язуючи квадратне рівняння (3) відносно $t_з$, отримуємо $t_3 \approx 3.65$ с.

Кут φ, на який повернеться точка за час до зупинки, можна знайти наступним чином

$$\varphi = \int_0^{t_з} \omega(t)\,dt = \int_0^{t_з} \left(\omega_0 + t - \frac{1}{2}t^2\right) dt = \left(\omega_0 t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3\right)\Bigg|_o^{t_з} = \tag{4}$$

$$= \omega_0 t_з + \frac{1}{2}t_з^{\ 2} - \frac{1}{6}t_з^{\ 3}.$$

Тоді шлях, пройдений точкою

$$S = \varphi R = \left(\omega_0 t_3 + \frac{1}{2}t_3^{\ 2} - \frac{1}{6}t_3^{\ 3}\right) R \approx 9.5 \quad (м).$$

Приклад 4. *Два тіла, зв'язані пружною нерозтяжною ниткою, ковзають по похилій площині, яка утворює з горизонтом кут нахилу $б = 30^\circ$ – рис.1.2. Маси тіл $M = 10$ г та $m = 5$ г, коефіцієнти тертя між тілами і площиною $м_1 = 0.1$ та $м_2 = 0.3$, відповідно. Знайти силу натягу нитки T.*

$M = 0.01$ кг
$m = 0.005$ кг
$\mu_1 = 0.1$
$\mu_2 = 0.3$
$\alpha = 30^\circ$
T - ?

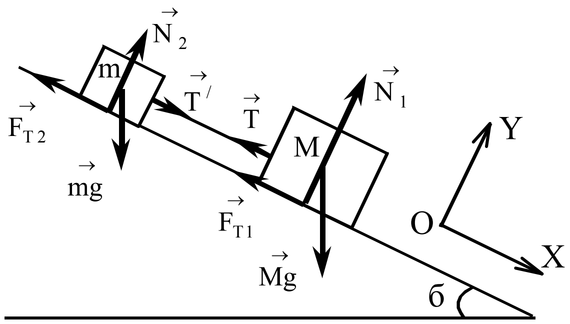

Рис.1.2.

Розв'язок:

Під час розв'язку будь-яких задач з динаміки необхідний порядок дій можна описати наступною послідовністю:

1) намалювати рисунок та розставити сили, які діють на всі тіла даної системи;

2) записати другий закон Ньютона для кожного тіла системи у вигляді

$$m\vec{a} = \sum \vec{F_i}\,, \qquad (1)$$

де m – маса тіла, $\vec{a}$ – вектор прискорення тіла. В правій частині рівняння стоїть сума всіх сил, що діють на тіло масою m;
3) вибрати систему координат та спроектувати рівняння (1) на осі цієї системи;
4) розв'язати систему отриманих скалярних рівнянь.

Для розв'язку даної задачі скористаємося запропонованою схемою.

1. Сили, що діють на кожне тіло, вказані на рис.1.2. Так, на тіло масою M діють: сила тяжіння $\vec{Mg}$ з боку Землі; сила з боку площини (цю силу можна розкласти на дві: силу реакції $\vec{N_1}$, спрямовану перпендикулярно до площини, та силу тертя $\vec{F_{T1}}$); і сила натягу нитки $\vec{T}$. На тіло масою m діють сили $\vec{mg}$, $\vec{N_2}$, $\vec{F_{T2}}$ і $\vec{T'}$. Оскільки нитка, що з'єднує тіла пружна і нерозтяжна, то сили натягу, які діють на кожне з тіл, однакові за величиною та протилежні за напрямом, тобто $\vec{T} = -\vec{T'}$.

2. Закони руху кожного з тіл описуються рівняннями

$$M\vec{a} = \vec{Mg} + \vec{T} + \vec{N_1} + \vec{F_{T1}}\,, \qquad (2)$$

$$m\vec{a} = \vec{mg} + \vec{T'} + \vec{N_2} + \vec{F_{T2}}\,. \qquad (3)$$

В рівняннях (2) і (3) враховано, що прискорення тіл однакові, $\vec{a_1} = \vec{a_2} = \vec{a}$ (нитка нерозтяжна).

3. В даному випадку рух тіл відбувається в площині і тому нам достатньо користуватися двовимірною системою координат. Виберемо її таким чином, щоб вісь OX була паралельна похилій площині,

а вісь OY – перпендикулярна до неї – див. рис.1.2. Спроектувавши рівняння (2) і (3) на OX та OY, отримуємо:

$$\begin{aligned} OX:\quad & M\,a = M\,g\sin\alpha - T - F_{T1} \\ & m\,a = m\,g\sin\alpha + T - F_{T2} \\ OY:\quad & 0 = -M\,g\cos\alpha + N_1 \\ & 0 = -m\,g\cos\alpha + N_2 \end{aligned} \qquad (4)$$

З врахуванням того, що під час ковзання тіла величини сили нормальної реакції N та сили тертя F_T зв'язані між собою співвідношенням $F_T = \mu N$, систему рівнянь (4) можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} M\,a = M\,g\sin\alpha - T - \mu_1 N_1 \\ m\,a = m\,g\sin\alpha + T - \mu_2 N_2 \\ 0 = -M\,g\cos\alpha + N_1 \\ 0 = -m\,g\cos\alpha + N_2 \end{cases} \qquad (5)$$

Ми отримали систему чотирьох рівнянь, в якій невідомими величинами є a, T, N_1 та N_2.

5. Розв'язуючи систему (5) відносно T та підставляючи числові данні, отримуємо

$$T = \frac{M\,m\,g\cos\alpha\left(\mu_2 - \mu_1\right)}{M + m} = \frac{0.01\cdot 0.005\cdot 9.81\cdot\cos 30^\circ\cdot\left(0.3 - 0.1\right)}{0.01 + 0.005} \approx$$

$$\approx 5.7\cdot 10^{-3}\quad (H).$$

Приклад 5. *Дві пружини з коефіцієнтами жорсткості $k_1 = 400\ Н/м$ та $k_2 = 250\ Н/м$ з'єднані послідовно і одним кінцем закріплено. До вільного кінця системи прикладено деяку зовнішню силу. Виявилось, що у стані рівноваги абсолютна деформація першої пружини $Дx_1 = 2\ см$. Визначити абсолютну деформацію другої пружини $Дx_2$.*

$k_1 = 400$ Н/м
$k_2 = 250$ Н/м
$\Delta x_1 = 0.02$ м
Δx_2 - ?

Розв'язок:

Згідно з законом Гука сила пружності, що виникає у деформованій пружині, дорівнює

$$F = k\,\Delta x\,, \qquad (1)$$

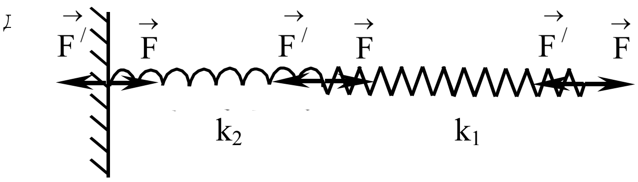

Рис.1.3.

формація. У стані рівноваги ця сила за величиною дорівнює зовнішній силі, яка деформує пружину. У випадку послідовного з'єднання пружин на них діють однакові за величиною сили. Тому для першої та другої пружин можемо записати

$$F = k_1 \, \Delta x_1 \,, \tag{2}$$

$$F = k_2 \, \Delta x_2 \,. \tag{3}$$

Прирівнюючи вирази (2) та (3), отримуємо

$$k_1 \, \Delta x_1 = k_2 \, \Delta x_2 \,,$$

$$\Delta x_2 = \frac{k_1}{k_2} \Delta x_1 = \frac{400}{250} \cdot 0.02 = 0.032 \quad (м).$$

Приклад 6. *Визначити лінійну та кутову швидкості супутника Землі, що обертається по коловій орбіті на висоті h над її поверхнею. Прискорення вільного падіння g біля поверхні Землі та радіус Землі R вважати відомими.*

h
g
R
v - ?
ω - ?

Розв'язок:

Рівняння руху супутника масою m по коловій орбіті навколо Землі має вигляд

$$\frac{m V^2}{(h+R)} = \gamma \frac{m M}{(h+R)^2} \,, \tag{1}$$

де $V^2/(h+R)$ – доцентрове прискорення, пов'язане з обертанням супутника (V – лінійна швидкість супутника, (h+R) – відстань між супутником і центром Землі); $\gamma \frac{m M}{(h+R)^2}$ – сила гравітаційної взаємодії Землі і супутника (M – маса Землі). З рівняння (1) отримуємо

$$V^2 = \frac{\gamma M}{(h+R)} \,. \tag{2}$$

Якби супутник знаходився на поверхні Землі, на нього діяла б гравітаційна сила F

$$F = \gamma \frac{m M}{R^2} = m g \,. \tag{3}$$

Тобто,

$$g = \frac{\gamma M}{R^2},$$

або

$$\gamma M = g R^2. \tag{4}$$

Підставляючи вираз (4) у формулу (2), для лінійної швидкості супутника знаходимо

$$V = R\sqrt{g/(h + R)}. \tag{5}$$

При обертанні тіла по колу радіусом (h+R) його лінійна швидкість V і кутова швидкість ω пов'язані співвідношенням $\omega = V/(h + R)$. Отже

$$\omega = R \cdot \sqrt{g/(h + R)^3}.$$

Приклад 7. *Металевий ціпок довжиною $L = 1$ м та масою $m = 1$ кг лежить на столі так, що зі столу звішується 1/5 його частина. До кінця ціпка підвішують вантаж масою $m_0 = 100$ г, під дією якого ціпок починає ковзати. Знайти швидкість V ціпка у момент часу, коли він відривається від краю стола. Коефіцієнт тертя між столом та ціпком м = 0.1.*

$L = 1$ м
$m = 1$ кг
$m_0 = 0.1$ кг
$\mu = 0.1$
V - ?

Розв'язок:

Розглянемо систему, що складається з ціпка та вантажу, які знаходяться у полі сили земного тяжіння. Така система буде мати певну потенціальну енергію, для обчислення якої необхідно вибрати деякий нульовий рівень. Приймемо за нульовий рівень такий, що відповідає точці А – рис.1.4. Тоді, в початковий момент часу, коли ціпок був нерухомим, повна енергія E_1 системи складалася лише з потенціальної і дорівнювала

$$E_1 = m_0 g \frac{4}{5} L + \frac{1}{5} m g \frac{9}{10} L + \frac{4}{5} m g L, \tag{1}$$

де перший доданок описує енергію вантажу, другий –

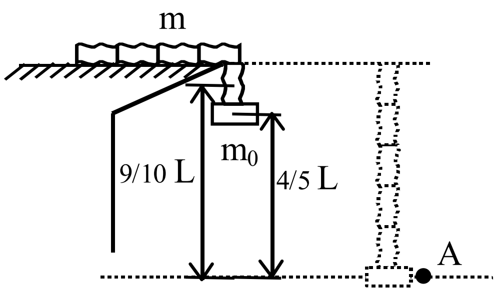

Рис.1.4.

тієї частини ціпка, яка звішувалась зі столу, третій – частини ціпка, яка перебувала на столі.

Повна енергія E_2 даної системи в момент часу, коли ціпок відривається від краю стола, може бути записана в наступному вигляді

$$E_2 = \frac{(m + m_0)V^2}{2} + m g \frac{1}{2} L , \tag{2}$$

де перший доданок – кінетична енергія ціпка і вантажу, які рухаються зі швидкістю V, а другий – потенціальна енергія ціпка.

Тоді, за законом збереження енергії,

$$E_1 = E_2 + A_T , \tag{3}$$

де A_T – робота сили тертя.

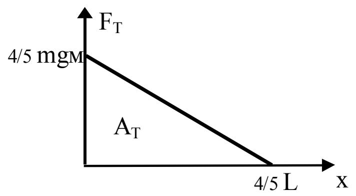

Рис.1.5.

Як відомо, величина сили тертя ковзання F_T залежить від коефіцієнта тертя і сили нормального тиску на поверхню. В нашому випадку сила нормального тиску визначається вагою тієї частини ціпка, яка знаходиться на столі і, отже, величина F_T змінюється з часом. Залежність F_T від шляху, який проковзав ціпок, має вигляд, зображений на рис.1.5. Роботу сили тертя можна обчислити як площу під графіком $F_T(x)$. Очевидно, що

$$A_T = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} m g \mu \cdot \frac{4}{5} L = \frac{8}{25} m g \mu L . \tag{4}$$

Підставляючи вирази (1), (2) та (4) у рівняння (3), остаточно отримуємо

$$\frac{4}{5} m_0 g L + \frac{49}{50} m g L = \frac{(m + m_0)V^2}{2} + \frac{1}{2} m g L + \frac{8}{25} m g \mu L ,$$

$$V = \sqrt{\frac{2 g L}{(m + m_0)} \left[\frac{4}{5} m_0 + \frac{8}{50} m (3 - 2\mu) \right]} \tag{5}$$

Використовуючи формулу (5), знаходимо

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.81 \cdot 1}{(1 + 0.1)} \left[\frac{4}{5} \cdot 0.1 + \frac{8}{50} \cdot 1 \cdot (3 - 2 \cdot 0.1) \right]} \approx 3.1 \quad (\text{м/с}) .$$

Приклад 8. *З шахти глибиною $h = 600$ м за допомогою канату, лінійна густина якого $c_l = 1.5$ кг/м, рівномірно піднімають вантаж масою $M = 3$ т. Яка робота A при цьому виконується? Який ККД η підйомного пристрою?*

$h = 600$ м
$M = 3\cdot 10^3$ кг
$\rho_1 = 1.5$ кг/м
A - ?
η - ?

Розв'язок:

Виконану роботу можна знайти за допомогою виразу:

$$A = \int_0^h F(x)\,dx\,, \quad (1)$$

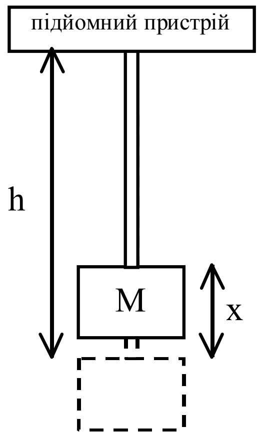

Рис.1.6.

де $F(x)$ – сила з боку підйомного пристрою, прикладена до системи. У формулі (1) враховано, що напрямок сили F (вертикально вгору) співпадає з напрямком переміщення вантажу і тому скалярний добуток $\vec{F}(x)\,d\vec{r} = F(x)\,dr\cos 0^\circ = F(x)\,dx$.

Оскільки вантаж рухається без прискорення (підйом рівномірний), то у кожний момент часу сила F має зрівноважувати силу тяжіння, яка діє на вантаж і на канат:

$$F(x) = [M + \rho_1(h - x)]g\,, \quad (2)$$

де x – відстань, на яку піднявся вантаж над дном шахти, $(h - x)$ – довжина канату в цей момент часу. Таким чином, сила, необхідна для підняття, залежить від глибини місцезнаходження вантажу. Підставляючи вираз (2) у формулу (1), знаходимо

$$A = \int_0^h [M + \rho_1(h - x)]g\,dx = \left(M g x + \rho_1 g h x - \frac{1}{2}\rho_1 g x^2\right)\Big|_0^h = $$
$$= g\left(M h + \rho_1 h^2 - \frac{1}{2}\rho_1 h^2\right) = g h\left(M + \frac{1}{2}\rho_1 h\right). \quad (3)$$

ККД η підйомного пристрою у даному випадку:

$$\eta = \frac{A_к}{A}\times 100\%\,, \quad (4)$$

де $A_к$ – корисна робота, необхідна для підйому саме вантажу (без врахування канату):

$$A_к = \int_0^h M\,g\,dx = M\,g\,h\,. \qquad (5)$$

Підставляючи вирази (3) та (5) у формулу (4), отримуємо:

$$\eta = \frac{M\,g\,h}{g\,h\left(M + \frac{1}{2}\rho_1 h\right)} \times 100\% = \frac{2M}{2M + \rho_1 h} \times 100\%\,. \qquad (6)$$

Використовуючи формули (3) та (6), знаходимо

$$A = 9.81 \cdot 600 \cdot \left(3 \cdot 10^3 + \frac{1}{2} \cdot 1.5 \cdot 600\right) \approx 2 \cdot 10^7 \quad (Дж)$$

$$\eta = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^3}{2 \cdot 3 \cdot 10^3 + 1.5 \cdot 600} \times 100\% \approx 87\,\%\,.$$

Приклад 9. *Ковзаняр, стоячи на льоду, кинув вперед гирю масою $m = 5$ кг, надавши їй відносно льоду швидкість $V = 2$ м/с. Визначити роботу A, яку виконав ковзаняр під час кидка, якщо його маса $M = 70$ кг. Тертям знехтувати.*

$m = 5$ кг
$M = 70$ кг
$V = 2$ м/с
A - ?

Розв'язок:

Для розв'язку задачі спочатку знайдемо швидкість U, яку отримав ковзаняр після кидка. Для цього скористаємося законом збереження імпульсу. Імпульс системи "ковзаняр-гиря" у початковий момент часу дорівнював нулеві (тіла нерухомі). Після кидка імпульс цієї системи буде складатися з суми імпульсів гирі та ковзаняра, тому:

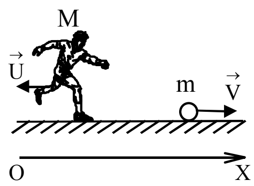

Рис.1.7.

$$0 = m\,\vec{V} + M\,\vec{U}\,. \qquad (1)$$

Спроектувавши рівняння (1) на вісь OX, отримуємо

$$0 = m\,V - M\,U\,,$$

звідки

$$U = \frac{m}{M} V . \tag{2}$$

Згідно закону збереження енергії робота, виконана ковзанярем, дорівнює зміні енергії системи “ковзаняр-гиря”, тобто сумі кінетичних енергій гирі і ковзаняра після кидка:

$$A = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} M U^2 . \tag{3}$$

Підставляючи вираз (2) у (3), маємо:

$$A = \frac{m(M+m)}{2M} V^2 . \tag{4}$$

Перевіримо розмірність:

$$[A] = \frac{кг \cdot кг}{кг} \cdot м \cdot с^{-2} = кг \cdot м \cdot с^2 \cdot м = Н \cdot м = Дж .$$

Використовуючи формулу (4), знаходимо

$$A = \frac{5 \cdot (70+5)}{2 \cdot 70} 2^2 \approx 10.7 \,(Дж).$$

Приклад 10. *Нейтрон влітає в речовину, яка складається з нерухомих атомів, ядра яких мають масу в $n = 100$ разів більшу за масу нейтрона. Нейтрон зтикається абсолютно пружно, змінюючи напрям швидкості після кожного удару на кут 90°. Яку кількість N таких зіткнень має здійснити нейтрон, щоб зменшити свою кінетичну енергію в $k = 100$ разів?*

$n = 100$
$k = 100$
N - ?

Розв’язок:

Розглянемо одне зіткнення нейтрона масою m з атомом масою nm. Нехай до зіткнення нейтрон мав швидкість V, після зіткнення – швидкість V_1, а швидкість атому після зіткнення V_2 і направлена вона під кутом α до початкового напряму руху нейтрона – рис.1.8.

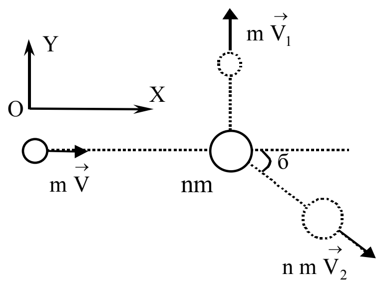

Рис.1.8.

Закон збереження імпульсу для даного зіткнення буде мати вигляд

$$m\vec{V} = m\vec{V}_1 + n\, m\vec{V}_2\,. \qquad (1)$$

Спроектувавши векторне рівняння (1) на осі координат, отримуємо систему скалярних рівнянь

$$\begin{aligned} OX:&\quad mV = n\, mV_2 \cos\alpha \\ OY:&\quad 0 = mV_1 - n\, mV_2 \sin\alpha \end{aligned}\,. \qquad (2)$$

Крім того, оскільки удар абсолютно пружний, то сума кінетичних енергій нейтрона і атома до і після співудару не змінюється:

$$mV^2/2 = mV_1{}^2/2 + n\, mV_2{}^2/2\,. \qquad (3)$$

Використовуючи рівняння (2) і (3), знайдемо зв'язок між швидкостями нейтрона до і після зіткнення. З системи (2) отримуємо

$$\cos\alpha = \frac{V}{nV_2}\,, \quad \sin\alpha = \frac{V_1}{nV_2}\,, \quad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{V_1{}^2}{n^2 V_2{}^2} = 1 - \frac{V^2}{n^2 V_2{}^2}\,,$$

звідки $V^2 + V_1{}^2 = n^2 V_2{}^2$.

Спираючись на рівняння (3), можемо записати $V^2 - V_1{}^2 = n\, V_2{}^2$.

Отже $\dfrac{V^2 + V_1{}^2}{V^2 - V_1{}^2} = n$, або $V_1{}^2 = \dfrac{n-1}{n+1} V^2$.

Таким чином, в результаті одного співудару кінетична енергія нейтрона зменшується в k_0 разів

$$k_0 = \frac{mV^2/2}{mV_1{}^2/2} = \frac{V^2}{V_1{}^2} = \frac{n+1}{n-1}\,. \qquad (4)$$

В результаті ж N зіткнень кінетична енергія зміниться в k разів

$$k = k_o{}^N = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^N. \qquad (5)$$

Отже

$$N = \ln k \Big/ \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right). \qquad (6)$$

Користуючись формулою (6), отримуємо

$$N = \frac{\ln 100}{\ln\left[(100+1)/(100-1)\right]} \approx 230\,.$$

Приклад 11. *Вздовж дотичної до шківа маховика прикладено силу $F = 1\,кН$. Маховик є диском діаметром $D = 75\,см$ та масою $m = 40\,кг$, радіус шківа $r = 12\,см$. Визначити кутове прискорення β та частоту обертання n маховика через час $t = 10\,c$ після початку дії сили. Силою тертя знехтувати.*

$D = 0.75$ м
$r = 0.12$ м
$m = 40$ кг
$F = 1000$ Н
$t = 10$ с
β - ?
n - ?

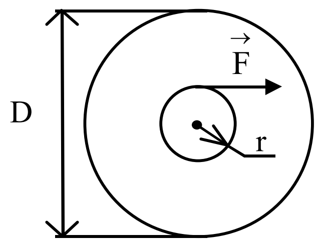

Рис.1.9.

Розв'язок:

Рівняння обертального руху тіла навколо нерухомої осі має вигляд:

$$I\beta = M\,, \quad (1)$$

де I – момент інерції тіла відносно осі обертання, β – кутове прискорення тіла, M – момент зовнішніх сил відносно цієї осі.

Для диску масою m і діаметром D, який обертається навколо осі симетрії, момент інерції:

$$I = \frac{1}{2} m \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\, m D^2\,. \quad (2)$$

Сили, прикладені до маховика – зовнішня сила F, сила тяжіння та сила реакції вала, на якому закріплено маховик. Напрямки двох останніх сил перетинають вісь обертання і тому моменти цих сил відносно осі дорівнюють нулеві. Силу F прикладено вздовж дотичної до шківа і тому її момент відносно осі обертання

$$M = F \cdot r\,. \quad (3)$$

Підставляючи вирази (3) і (2) у рівняння (1) для β, отримуємо:

$$\frac{1}{8} m D^2 \beta = F \cdot r$$

$$\beta = \frac{8 F r}{m D^2}\,. \quad (4)$$

При рівноприскореному обертанні кутова швидкість ω зв'язана з кутовим прискоренням співвідношенням

$$\omega = \beta\, t\,, \quad (5)$$

де t – час обертання. У формулі (5) вважається, що у момент часу $t = 0$ тіло почало обертання з нерухомого положення. У свою чергу, частота обертання n та кутова швидкість ω також пов'язані між собою:

$$n = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{6}$$

Остаточно, враховуючи вирази (4-6), отримуємо

$$n = \frac{4Frt}{m\pi D^2}. \tag{7}$$

Користуючись формулами (4) та (7), знаходимо

$$\beta = \frac{8 \cdot 1000 \cdot 0.12}{40 \cdot (0.75)^2} \approx 42.7 \quad \left(\text{рад} \cdot c^{-2}\right)$$

$$n = \frac{4 \cdot 1000 \cdot 0.12 \cdot 10}{40 \cdot 3.14 \cdot (0.75)^2} \approx 67.9 \quad \left(c^{-1}\right).$$

Приклад 12. *Однорідний циліндр скочується без проковзування по похилій площини, яка утворює кут $б = 30^\circ$ з горизонтом. Визначити прискорення а центру мас циліндра. Яким має бути коефіцієнт тертя μ між циліндром та площиною, щоб проковзування не відбувалося?*

$\alpha = 30^\circ$
a - ?
μ - ?

Розв'язок:

Для розв'язку даної задачі потрібно одночасно використовувати як другий закон Ньютона, так і основне рівняння динаміки обертального руху.

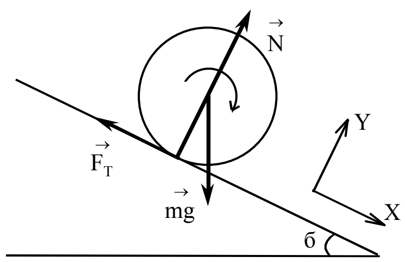

Рис.1.10.

На циліндр діють три сили: сила тяжіння $m\vec{g}$, сила тертя кочення $\vec{F}_T$ і сила реакції площини $\vec{N}$. Отже, другий закон Ньютона для даної системи матиме вигляд

$$m\vec{a} = \vec{mg} + \vec{N} + \vec{F}_T, \tag{1}$$

де a – прискорення центра мас циліндру, m – його маса.

Рівняння обертального руху циліндра відносно його осі симетрії матиме вигляд:

$$I\beta = R\,F_T\,, \qquad (2)$$

де I – момент інерції циліндра відносно цієї осі, β – кутове прискорення, R – радіус циліндру. В рівнянні (2) враховано, що напрямки сил тяжіння і реакції площини проходять через вісь обертання і тому у правій частині рівняння необхідно розглядати лише момент сили тертя, яка спрямована вздовж дотичної до поверхні циліндру.

Вибравши систему координат, як показано на рис.1.10, і спроектувавши на її осі рівняння (1), отримуємо:

$$\begin{aligned} OX:&\quad m\,a = m\,g\sin\alpha - F_T \\ OY:&\quad 0 = -m\,g\cos\alpha + N \end{aligned}\,. \qquad (3)$$

Зауважимо, що при коченні співвідношення $F_T = \mu\,N$, справедливе для ковзання, не виконується. Виразивши силу F_T з рівняння (2) і підставивши в перше рівняння системи (3), маємо:

$$m\,a = m\,g\sin\alpha - \frac{I\beta}{R}\,.$$

При русі циліндра без проковзування a та β пов'язані між собою співвідношенням $a = \beta R$. Тому

$$m\,a = m\,g\sin\alpha - \frac{I\,a}{R^2}\,.$$

Врахувавши, що момент інерції циліндра відносно осі симетрії $I = \frac{1}{2}\,m\,R^2$, остаточно можемо записати:

$$m\,a = m\,g\sin\alpha - \frac{m\,R^2\,a}{2\,R^2}\,,$$

$$a = \frac{2}{3}\,g\sin\alpha\,. \qquad (4)$$

Рух відбувається без проковзування, якщо F_T не перевищує максимальне значення сили тертя спокою $F_{T0} = \mu\,N$. Тобто, необхідне виконання умови

$$F_T \le F_{T0}. \tag{5}$$

З врахуванням виразів (2) та (4), маємо $F_T = \dfrac{Ia}{R^2} = \dfrac{mR^2}{2R^2}\dfrac{2}{3}g\sin\alpha = \dfrac{1}{3}mg\sin\alpha$. З другого рівняння системи (3) випливає, що $N = mg\cos\alpha$. Підставивши ці вирази в нерівність (5), отримуємо

$$\frac{1}{3}mg\sin\alpha \le \mu mg\cos\alpha,$$

$$\mu \ge \frac{1}{3}\mathrm{tg}\alpha. \tag{6}$$

Використовуючи вирази (4) та (6), знаходимо:

$$a = \frac{2}{3}\cdot 9.81\cdot\sin 30^\circ \approx 3.3\ \left(м/с^2\right),$$

$$\mu \ge \frac{1}{3}\cdot \mathrm{tg}30^\circ \approx 0.2.$$

Приклад 13. *Диск масою $m = 5$ кг та радіусом $R = 30$ см обертається з частотою щ = 20 рад/с навколо осі, яка співпадає з його віссю симетрії. Для гальмування диска до його плоскої поверхні притискають деяку іншу плоску поверхню і утримують її нерухомою. Сила, з якою притискають цю поверхню, дорівнює $F = 200$ Н. Через який час t диск зупиниться? Коефіцієнт тертя між поверхнями м = 0.5.*

Розв’язок:

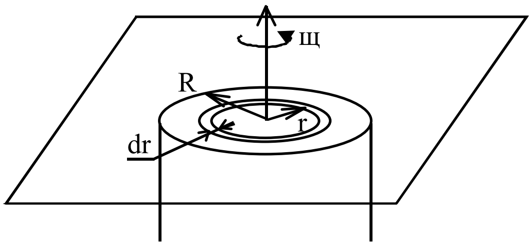

Рис.1.11.

$m = 5$ кг	
$R = 0.3$ м	
$\omega = 20$ рад/с	
$F = 200$ Н	
$\mu = 0.5$	
t - ?	

Для розв'язку задачі скористаємося основним рівнянням динаміки обертального руху

$$I\beta = M, \qquad (1)$$

де в нашому випадку I – момент інерції диску, $I = \frac{1}{2} m R^2$; β – кутове прискорення, з яким сповільнюється диск; M – момент сили тертя, яка діє на диск і спричинює сповільнення.

Для знаходження M розіб'ємо диск на тонкі циліндричні шари. Нехай радіус одного з них r, товщина dr. Силу тертя $dF_T(r)$, що діє на кожен такий шар, можна знайти як добуток площі шару $dS(r)$ на тиск, з яким плоску поверхню притискають до диску, і на коефіцієнт тертя:

$$dF_T(r) = dS(r)\frac{F}{\pi R^2}\mu, \qquad (2)$$

де πR^2 – площа поверхні всього диску. В свою чергу,

$$dS(r) = 2\pi r\, dr. \qquad (3)$$

Так як $dF_T(r)$ спрямована вздовж дотичної до циліндричного шару, то відносно осі обертання момент сили $dM(r)$, яка діє на цей шар, може бути обчислений як

$$dM(r) = r \cdot dF_T(r) = \frac{2F\mu r^2}{R^2} dr. \qquad (4)$$

Для знаходження загального моменту сили тертя необхідно просумувати $dM(r)$ по всім шарам:

$$M = \int_0^R dM(r) = \int_0^R \frac{2F\mu r^2}{R^2} dr = \frac{2F\mu}{R^2}\int_0^R r^2 dr = \frac{2F\mu}{R^2} \cdot \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^R = \frac{2}{3} F\mu R. \qquad (5)$$

З урахуванням виразів (1) та (5), для кутового прискорення диску можемо записати

$$\beta = \frac{M}{I} = \frac{4F\mu}{3mR}. \qquad (6)$$

Тоді час, через який зупиниться диск

$$t = \frac{\omega}{\beta} = \frac{3 m R \omega}{4 F \mu}. \tag{7}$$

Використовуючи формулу (7), знаходимо

$$t = \frac{3 \cdot 5 \cdot 0.3 \cdot 20}{4 \cdot 200 \cdot 0.5} \approx 0.2 \quad (c).$$

Приклад 14. *Платформа у вигляді суцільного однорідного диску обертається за інерцією навколо нерухомої вертикальної осі, яка співпадає з віссю симетрії диску. На краю платформи стоїть людина, маса якої в $n = 4$ рази менша за масу платформи. Як і у скільки разів зміниться швидкість обертання платформи, якщо людина перейде ближче до центра на відстань r, що дорівнює половині радіуса платформи R?*

$n = 4$
$r = 0.5 R$
ω_2 / ω_1 - ?

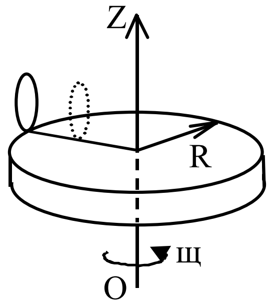

Рис.1.12.

Розв'язок:

Нехай вісь OZ – вісь обертання. Оскільки платформа обертається за інерцією, то можна вважати, що момент зовнішніх сил відносно осі обертання дорівнює нулеві. Отже, згідно закону збереження моменту імпульсу, момент імпульсу L системи "платформа-людина" відносно осі OZ залишається сталим. Тобто:

$$L_1 = L_2. \tag{1}$$

де L_1 – момент імпульсу системи до того моменту часу, як людина здійснила свій перехід, L_2 – після переходу. У свою чергу:

$$\begin{array}{l} L_1 = \omega_1 I_1 \\ L_2 = \omega_2 I_2 \end{array}. \tag{2}$$

де ω_1 і ω_2 – кутові швидкості обертання платформи з людиною до і після переходу, відповідно; I_1 та I_2 – моменти інерції системи відносно осі OZ:

$$\begin{array}{l} I_1 = I_1^{/} + I_1^{//} \\ I_2 = I_2^{/} + I_2^{//} \end{array}. \tag{3}$$

де $I^{/}$ та $I^{//}$ – моменти інерції платформи та людини, відповідно; індекси 1 і 2 відповідають моментам часу до і після переходу.

Після переміщення людини момент інерції платформи не змінюється, тобто $I_1^{/} = I_2^{/}$ і дорівнює моменту інерції диска радіусом R та масою M відносно його осі симетрії:

$$I_1^{/} = I_2^{/} = M R^2 / 2 . \qquad (4)$$

Якщо розглядати людину як матеріальну точку масою m, то

$$I_1^{//} = m R^2,$$
$$I_2^{//} = m r^2 = m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} m R^2. \qquad (5)$$

Таким чином:

$$I_1 = \frac{1}{2} M R^2 + m R^2 = \frac{1}{2} R^2 (M + 2m)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} M R^2 + \frac{1}{4} m R^2 = \frac{1}{4} R^2 (2M + m)$$

$$\omega_1 \cdot \frac{1}{2} R^2 (M + 2m) = \omega_2 \cdot \frac{1}{4} R^2 (2M + m)$$

$$2\omega_1 m\left(\frac{M}{m} + 2\right) = \omega_2 m\left(2\frac{M}{m} + 1\right)$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{2(M/m + 2)}{(2M/m + 1)} . \qquad (6)$$

За умовою задачі $M/m = n = 4$, тому

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{2(n+2)}{(2n+1)} = \frac{2 \cdot (4+2)}{(2 \cdot 4 + 1)} = \frac{4}{3} .$$

Таким чином, після переходу людини з краю платформи ближче до центру швидкість обертання платформи зросте у $4/3$ рази.

Приклад 15. *π-мезон є нестабільною частинкою. Власний час його життя* $\phi_0 = 2.6 \cdot 10^{-8}$ c^{-1}. *Яку відстань S пролетить π-мезон до* *розпаду, якщо він рухається зі швидкістю $V = 0.99\,c$ (с – швидкість світла у вакуумі)?*

$\tau_0 = 2.6\cdot10^{-8}\ c^{-1}$ $V = 0.99\,c$	Розв’язок:
S - ?	Згідно виразу для лорентцевого сповільнення часу

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \qquad (1)$$

де τ_0 – проміжок часу у системі координат, яка рухається разом з тілом зі швидкістю V (у власній системі координат), τ – проміжок часу у нерухомій системі координат. У даній задачі τ_0 – власний час життя π-мезона, τ – час життя π-мезона у системі відліку, яка пов’язана зі спостерігачем на Землі. За час τ π-мезон, рухаючись рівномірно відносно Землі, подолає відстань S:

$$S = \tau V,$$

або

$$S = \frac{\tau_0 V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \qquad (2)$$

Підставляючи числові значення у формулу (2), отримуємо

$$S = \frac{2.6\cdot10^{-8}\cdot0.99\cdot3\cdot10^{8}}{\sqrt{1-(0.99)^2}} \approx 54.7 \quad (м).$$

Задачі для самостійного розв’язку

1. Автомобіль рухався наступним чином: половину шляху він пройшов зі швидкістю $V_1 = 80$ км/год, а частину шляху, яка залишилася, він половину часу рухався зі швидкістю $V_2 = 70$ км/год, а другу половину часу зі швидкістю $V_3 = 60$ км/год. Знайти середню швидкість $\langle V \rangle$ автомобіля.

2. Залежність швидкості матеріальної точки від часу при одновимірному русі має вигляд, наведений на рис 1.13. Вважаючи що в момент часу $t = 0$ точка знаходилася в початку координат, побудувати залежності від часу прискорення матеріальної точки, її координати та шляху.

3. Тіло, що має певну початкову швидкість, рухається рівноприскорено. За час t воно пройшло шлях S, збільшивши швидкість при цьому в n разів. Знайти прискорення, з яким рухалося тіло.

4. Тіло кинули під кутом α до горизонту зі швидкістю V_0. Знайти дальність польоту L, висоту підйому H та час польоту T. Визначити, під яким кутом β до горизонту спрямована швидкість тіла через час τ після кидка.

5. Радіус-вектор матеріальної точки змінюється за законом $\vec{r}(t) = \left(1 + t^2\right)\vec{i} + t^2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$. Знайти: а) шлях S, який проходить точка за третю секунду; б) кут α між векторами $\vec{V}$ і $\vec{a}$ у момент часу t=3 с; в) середню швидкість $\langle V \rangle$ за перші десять секунд руху.

6. Знайти швидкості точок A, B, C, D обруча (рис.1.14), який рухається без проковзування по горизонтальній поверхні, якщо швидкість поступального руху центру обруча дорівнює V.

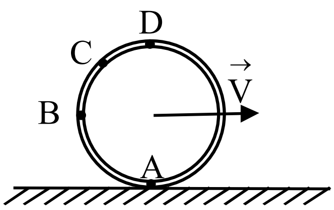

Рис.1.14.

7. Точка обертається по колу радіусом r навколо нерухомої осі за законом

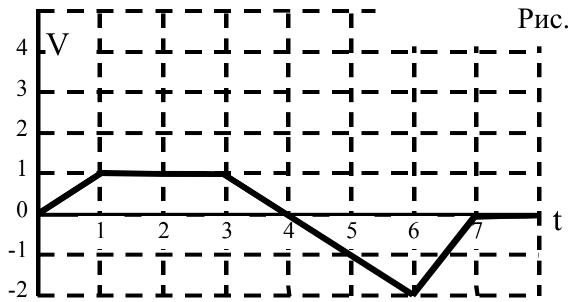

Рис.1.13.

$\varphi = A + Bt + Ct^2$. Знайти повне прискорення точки в момент часу $t = \tau$. A, B, C – відомі сталі.

8. Нерухоме тіло починає обертатися по колу з кутовим прискоренням $\beta = t(1+2t)$ рад/с^2. Скільки повних обертів виконає тіло за перші 3 секунди руху? Чому дорівнює кут між вектором швидкості $\vec{V}$ та повного прискорення $\vec{a}$ у цей момент часу?

9. Тіло масою $M = 20$ г лежить на горизонтальній поверхні. До нього прикладають силу $F = 0.1$ Н, спрямовану під кутом $\alpha = 60^\circ$. Тіло починає ковзати. За який час t тіло пройде шлях $S = 80$ см, якщо коефіцієнт тертя між ним та площиною $\mu = 0.2$.

10. Через невагомий блок перекинута пружна невагома нитка, до кінців якої прикріплені тіла масами M та m. Блок підвішений до стелі за допомогою мотузки. Тіла відпускають і вони починають рухатися. Знайти силу натягу мотузки. Тертя у блоці відсутнє, абсолютну деформацію нитка вважати малою.

11. Дана система – див. рис.1.15 Маси вантажів m і M, коефіцієнт тертя μ між меншим вантажем і площиною відомі. Знайти прискорення вантажів.

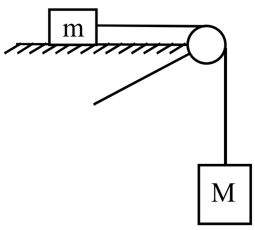

Рис.1.15.

12. Потяг вагою $P = 4400$ кН рухається по горизонтальній дорозі зі швидкістю $V = 27$ км/год. Знайти час, протягом якого потяг зможе зупинитися, якщо гальмуюча сила $F = 44$ кН.

13. На ідеально гладкій $(\mu = 0)$ похилій площині, що утворює кут α з горизонтом, лежить дошка масою M. З яким прискоренням і в якому напрямі повинна бігти людина масою m, щоб дошка не ковзала вниз вздовж площини.

14. Плита масою $M = 20$ кг і довжиною $L = 1$ м лежить на ідеально гладкій горизонтальній поверхні – рис.1.16. На краю плити знаходиться тіло масою

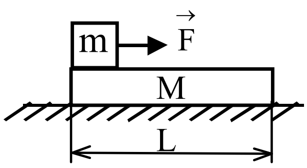

Рис.1.16.

$m = 2$ кг, до якого прикладена горизонтальна сила $F = 10$ Н. Коефіцієнт тертя між тілом і плитою $\mu = 0.2$. Вважаючи, що обидва тіла рухаються, знайти 1) прискорення плити a_1 та прискорення тіла a_2 відносно землі; 2) час t, за який верхнє тіло сповзе з плити.

15. Дві пружини з коефіцієнтами пружності k_1 і k_2 з'єднали послідовно. З яким коефіцієнтом пружності потрібно взяти пружину, щоб вона замінила ці дві послідовно з'єднані пружини.

16. Визначити, з якою частотою ω потрібно обертати диск, щоб тіло, яке знаходиться на відстані $l = 10$ см від вісі обертання, почало ковзати (коефіцієнт тертя між тілом і диском $\mu = 0.2$).

17. Велосипедист проходить поворот радіусом R зі швидкістю V. Який повинен бути коефіцієнт тертя, щоб він не впав? На який кут йому потрібно нахилитися?

18. Гармата, що встановлена на поверхні Землі, стріляє вертикально вгору. При якій мінімальній швидкості, наданій снаряду, він віддалиться від поверхні на відстань R, що дорівнює радіусу Землі? Вважати, що під час руху на снаряд діє тільки гравітаційна сила з боку Землі.

19. На якій висоті h над полюсом Землі прискорення вільного падіння зменшується а) на один процент; б) в два рази?

20. Уявіть собі, що ви створили модель Сонячної системи в η разів меншу, ніж дійсна. Однак, середні густини Сонця і планет при цьому залишилися незмінними. Як зміняться при цьому періоди обертання планет навколо Сонця?

21. Супутник, що рухається в екваторіальній площині Землі з заходу на схід по коловій орбіті радіусом $R = 2 \cdot 10^4$ км, з'являється над певним пунктом на екваторі через кожні $\tau = 11.6$ год. Розрахувати на підставі цих даних масу Землі $M_З$. Значення гравітаційної сталої вважати відомим.

22. Тіло масою m починає ковзати по похилій площині довжиною l, яка утворює кут α з горизонтом. Коефіцієнт тертя між тілом і площиною μ. Знайти роботи сили тертя A_T та сили тяжіння A_{mg} за час ковзання тіла. Визначити потужність сили тертя P в момент часу $t = \tau$ після початку руху.

23. Частинка здійснила переміщення по деякій траєкторії з точки з радіус-вектором $\vec{r}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}$ в точку з радіус-вектором $\vec{r}_2 = 2\vec{i} - 3\vec{j}$. При цьому на неї діяли деякі сили, одна з яких $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Знайти роботу А, яку виконала сила $\vec{F}$.($\vec{i}$ та $\vec{j}$ – орти осей х та у, відповідно.

24. Тіло масою $m = 40$ г кинуте з поверхні Землі під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту. Через $t = 5$ с воно впало на Землю. Визначити роботу, виконану під час кидка. Тертям між тілом і повітрям знехтувати.

25. Яка робота А буде виконана силами гравітаційного поля при падінні на Землю тіла масою $m = 2$ кг а) з висоти $h = 1000$ км; б) з нескінченності?

26. Шайба масою m без початкової швидкості зісковзує з похилої площини, що утворює кут α з горизонтом і, пройшовши по горизонталі відстань L, зупиняється. Знайти роботу сил тертя А на всьому шляху. Вважати, що коефіцієнт тертя всюди однаковий і рівний μ.

27. З пружинного пістолета вистрілили кулькою масою m. Жорсткість пружини k. Абсолютна деформація пружини до пострілу Δx. Визначити швидкість кульки при її вильоті з пістолета. Знайти висоту, на яку підніметься кулька, якщо постріл спрямувати вертикально вгору.

28. Від двоступеневої ракети загальною масою М в момент, коли вона досягла швидкості V_0, відділилась друга ступінь масою m. Швидкість цієї ступені при цьому збільшилась до V_2. Визначити, з якою швидкістю V_1 буде рухатися перша ступінь. Швидкості вказано відносно спостерігача на Землі.

29. З клина масою М, який стоїть на гладкій горизонтальній поверхні, зісковзує тіло масою m. Кут нахилу клину плавно змінюється до нуля в нижній частині (рис.1.17). При переході на горизонтальну площину швидкість тіла V. Визначити висоту, з якої зісковзує тіло.

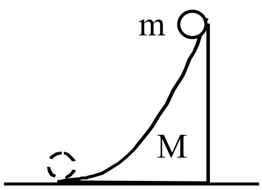

Рис.1.17.

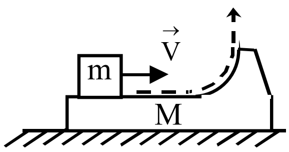

Рис.1.18

30. На гладкій горизонтальній площині знаходиться тіло масою M, а на ньому шайба масою m (рис.1.18). Шайбі надали швидкість V в горизонтальному напрямку. На яку максимальну висоту (відносно початкового рівня) підніметься шайба після відриву від тіла M. Тертям знехтувати.

31. Два човна рухаються паралельними курсами назустріч один одному. Коли човни порівнялися, з одного з них на інший обережно переклали вантаж масою m. Після цього човен з вантажем зупинився, а човен без вантажу продовжував рухатися зі швидкістю V. З якими швидкостями V_1 і V_2 рухалися човни до зустрічі, якщо маса човна, в який переклали вантаж, M.

32. Снаряд летів горизонтально зі швидкістю $V = 50$ м/с. В деякий момент часу він розірвався на два уламки однакової маси. Один уламок полетів вертикально вгору зі швидкістю $V_1 = 25$ м/с. Визначити швидкість V_2 другого уламку. Всі швидкості вказано відносно землі.

33. Між частинкою, яка має масу m та швидкість V, і нерухомою частинкою масою M відбувається абсолютно пружне зіткнення. При цьому напрям швидкості частинки m змінюється на 90°. Чому дорівнюють швидкості частинок після зіткнення? Який кут розльоту частинок?

34. На горизонтальній поверхні знаходиться нерухома куля. На неї налітає така сама куля. Чому дорівнює кут розльоту куль після абсолютно пружного удару?

35. Дві маленькі кульки масами M і m підвішені на нитках довжиною L кожна в одній точці. Кульку масою M відхилили на кут α від вертикалі і відпустили. На яку висоту піднімуться кульки після абсолютно непружного зіткнення? Скільки тепла при цьому виділиться?

36. По невеликому шматку заліза масою m_1, який лежить на ковадлі, б’є молот масою m_2. Визначити ККД удару, якщо удар аб-

солютно непружний. Корисною вважати енергію, витрачену на деформацію шматка заліза.

37. Знайти момент інерції диска масою m і радіусом R відносно осей, що перпендикулярні до його площини і проходять а) через його центр; б) через його обід.

38. Молекулу HCl можна уявити у вигляді двох маленьких кульок масами m_1 і m_2, які знаходяться на відстані L одна від одної. Визначити момент інерції молекули відносно осі, що проходить через центр мас системи перпендикулярно до прямої, яка з'єднує атоми.

39. Однорідна балка лежить на платформі таким чином, що один її край на 1/3 довжини звисає з платформи. До цього краю прикладають силу, направлену вертикально вниз. Коли ця сила стає рівною $F = 15$ Н, протилежний кінець балки починає підніматися. Знайти масу балки m.

40. Під яким мінімальним кутом до горизонту може стояти драбина, яка торкається гладкої вертикальної стіни верхнім кінцем, якщо центр її маси знаходиться посередині. Коефіцієнт тертя між драбиною і підлогою μ.

41. Циліндр масою $m = 10$ кг і радіусом $R = 15$ см закріплено на кронштейні. На нього намотана нитка (рис.1.19). В момент часу $t = 0$ до кінця нитки у напрямку дотичної до бокової поверхні циліндра почала діяти сила $F = 10$ Н. За який час τ циліндр зробить $N = 5$ обертів?

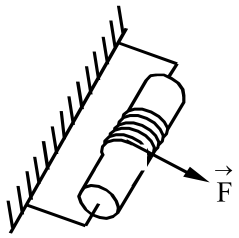

Рис.1.19.

42. Через блок у вигляді суцільного диску масою m перекинута тонка нерозтяжна невагома нитка, до кінців якої підвішені вантажі масами m_1 і m_2. Визначити прискорення вантажів, якщо їх відпустити. Під час руху ковзання нитки по поверхні блоку відсутнє. Диск обертається навколо горизонтальної осі без тертя.

43. Пробірка довжиною $L = 15$ см, яка стояла вертикально, починає падати на стіл. Тертя настільки велике, що її нижній кінець не ковзає. Яку кутову та лінійну швидкість буде середня точка пробірки в момент, коли вона торкається столу?

44. На легкому столику, який вільно обертається з кутовою швидкістю ω_1, стоїть людина і тримає на випростаних руках дві однакові гирі масою m кожна. Відстань між гирями L_1. Потім людина зблизила гирі до відстані L_2 і кутова швидкість обертання столика при цьому зросла до ω_2. Вважаючи момент інерції людини відносно осі обертання столика сталим, знайти роботу A, яку людина виконала.
45. Горизонтальний диск обертають з постійною кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі, що проходить через його центр. По одному з діаметрів диску рухається невелике тіло масою m з постійною швидкістю $V^{/}$ відносно диску. Знайти силу, з якою диск діє на це тіло в момент часу, коли тіло знаходиться на відстані r від осі обертання.
46. На екваторі з висоти h на поверхню Землі падає тіло (без початкової швидкості відносно Землі). Нехтуючи опором повітря, знайти, на яку відстань і в який бік відхилиться від вертикалі тіло в момент торкання поверхні.
47. Знайти власну довжину стрижня, якщо в лабораторній системі відліку його швидкість $V = \beta c$, довжина L, кут між ним і напрямом руху θ.
48. Дві релятивістські частинки рухаються під прямим кутом одна до одної в лабораторній системі відліку, причому одна зі швидкістю V_1, а друга зі швидкістю V_2. Знайти їх відносну швидкість.
49. З якою швидкістю V рухався в лабораторній системі відліку годинник, якщо за час $t = 5$ с (в лабораторній системі) він відстав від годинника цієї системи на час $\Delta t = 0.1$ с.
50. Виходячи з перетворень Лорентца отримати вирази, що описують ефекти скорочення довжини та сповільнення часу.
51. Визначити швидкість електрону, який має кінетичну енергію T.
52. При якій швидкості протона його кінетична енергія складає 90% від повної енергії?
53. Визначити релятивістський імпульс електрону з кінетичною енергією T.

Частина 2. Молекулярна фізика

Основні формули

Кількість речовини

$$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M},$$

де N – кількість молекул речовини, N_A – стала Авогадро, m – маса речовини, M – молярна маса даної речовини.

Рівняння стану ідеального газу (рівняння Менделєєва-Клапейрона):

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

де p –тиск газу, V – об'єм, який цей газ займає, T – абсолютна температура газу, R – універсальна газова стала.

Об'єднаний газовий закон: якщо маса ідеального газу залишається сталою ($m = const$), то

$$\frac{pV}{T} = const.$$

Рівняння для ізопроцесів, які відбуваються при сталій масі ідеального газу ($m = const$):

а) закон Бойля-Маріотта (ізотермічний процес – $T = const$):

$$pV = const;$$

б) закон Гей-Люссака (ізобаричний процес – $p = const$):

$$\frac{V}{T} = const;$$

в) закон Шарля (ізохоричний процес – $V = const$):

$$\frac{p}{T} = const;$$

г) рівняння Пуассона (адіабатичний процес):

$$pV^{\gamma} = const,$$

де показник адіабати $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ (C_p і C_V – молярні теплоємності газу при сталому тиску і об'ємі, відповідно);

Політропічним називається процес, який відбувається при сталій теплоємності газу: $C = \text{const}$. При політропічному процесі, який відбувається зі сталою масою ідеального газу:

$$p V^{n} = \text{const},$$

де показник політропи $n = \dfrac{C - C_p}{C - C_V}$ (C – молярна теплоємність).

Закон Дальтона: тиск суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків компонентів суміші:

$$p = \sum_{i=1}^{z} p_i ,$$

де z – кількість компонентів суміші. Парціальний тиск – це тиск, який мав би кожен з компонентів суміші окремо, якщо б він при даній температурі заповнював весь об'єм.

Основне рівняння кінетичної теорії газів

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle ,$$

де n – концентрація молекул, $\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle$ – середня кінетична енергія поступального руху однієї молекули.

Середня повна енергія однієї молекули

$$\langle \varepsilon_{\text{повн}} \rangle = \frac{i}{2} k T ,$$

де $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{об}} + 2 i_{\text{кол}}$, а $i_{\text{пост}}$, $i_{\text{об}}$, $i_{\text{кол}}$ – кількість поступальних, обертальних і коливних ступенів вільності молекули, відповідно. При зниженні температури молекула поступово перестає приймати участь у певному русі, відповідні ступені вільності стають неактивними. Про такі ступені вільності говорять, що вони "заморожені". Температура, вище якої потрібно нагріти газ, щоб його молекули ефективно приймали участь у відповідному русі, називається характеристичною. Так, наприклад, для молекули водню характеристична температура обертального руху – 175 К, а коливального – 6000 К.

Молярні теплоємності ідеального газу:

$$C_V = \frac{i}{2}R, \qquad C_p = \frac{i+2}{2}R\,,$$

$$C_p - C_V = R \qquad \left(\text{співвідношення Майєра}\right).$$

Перший принцип термодинаміки: кількість теплоти Q, отримана системою витрачається на збільшення її внутрішньої енергій ΔU та на виконання системою роботи A проти зовнішніх сил

$$Q = \Delta U + A\,.$$

Внутрішня енергія ідеального газу:

$$U = \frac{m}{M} C_V T\,.$$

Робота, яка здійснюється газом при зміні його об'єму від V_1 до V_2:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\left(V\right) dV\,.$$

Ентропія системи S визначається формулою Больцмана:

$$S = k \ln \Omega\,,$$

де Ω – кількість мікростанів, що відповідають даному макростану системи, k – стала Больцмана.

Різниця ентропій в двох рівноважний станах A і B:

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}\,,$$

причому перехід із стану A в стан B має бути оборотнім.

Зведена теплота

$$\frac{\delta Q}{T}\,,$$

де δQ – кількість теплоти, що отримала система від зовнішнього джерела, T – температура джерела протягом процесу теплообміну.

Якщо система здійснює цикл, який складається тільки з будь-яких оборотних процесів, то

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0 \qquad \text{(рівність Клаузіуса)} \qquad .$$

Якщо при здійсненні циклу присутні мають місце необоротні процеси, то

$$\oint \frac{\delta Q}{T} < 0 \qquad \text{(нерівність Клаузіуса)} \qquad .$$

Другий принцип термодинаміки:
- неможливий циклічний процес, єдиним результатом якого було б виконання роботи за рахунок охолодження теплового резервуару (формулювання Томсона);
- неможливий процес, єдиним результатом якого була б передача тепла від менш нагрітого тіла до більш нагрітого (формулювання Клаузіуса);
- ентропія теплоізольованої системи не зменшується, так для замкненого процесу

$$\Delta S \geq 0 .$$

ККД теплової машини:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} ,$$

де Q_1 – кількість теплоти, отримана за цикл робочим тілом машини від нагрівача, Q_2 – кількість теплоти, що віддана за цикл холодильнику.

У випадку, якщо теплова машина працює за циклом Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} ,$$

де T_1 і T_2 – абсолютні температури нагрівача і холодильника, відповідно.

Функція розподілу молекул за модулями швидкостей (функція розподілу Максвелла):

$$dN(\upsilon) = N\left(\frac{m_0}{2\pi k T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_0 \upsilon^2}{2 k T}\right) 4\pi \upsilon^2 \, d\upsilon ,$$

де dN – кількість молекул, які при температурі T мають швидкість, модуль якої знаходиться в інтервалі $[\upsilon, \upsilon + d\upsilon]$; m_0 – маса однієї молекули, N – загальна кількість молекул.

Функція розподілу Больцмана:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{E - E_0}{kT}\right),$$

де n і n_0 – концентрації молекул в областях простору, де їх потенціальні енергії дорівнюють E та E_0, відповідно.

Рівняння стану газу Ван-дер-Ваальса:

$$\left(p + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu R T,$$

де a і b – сталі Ван-дер-Ваальса.

Зв'язок між сталими a і b та критичними параметрами речовини:

$$T_{кр} = \frac{8a}{27bR}, \quad V'_{кр} = 3b, \quad p_{кр} = \frac{a}{27b^2},$$

де $V'_{кр}$ – об'єм, який займає один моль речовини у критичному стані. Слід зауважити, що критичний стан довільної маси газу m може існувати при $p_{кр}$ і $T_{кр}$ лише в певному об'ємі $V_{кр}$, який дорівнює

$$V_{кр} = \frac{m}{M} V'_{кр}.$$

Це означає, що критичний стан можливий тільки тоді, коли об'єм посудини $V_{П}$, в якій міститься маса газу m, дорівнює критичному об'єму $V_{кр}$. Якщо $V_п > V_{кр}$, то рідина, яка нагрівається, вся випарується до досягнення критичної температури. Якщо $V_п < V_{кр}$, то газ скраплюється до досягнення критичної температури.

Внутрішня енергія газу Ван-дер-Ваальса

$$U = \nu C_V T - \frac{a\nu^2}{V}.$$

Середня довжина вільного пробігу молекули газу

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi\sigma^2 n},$$

де σ – ефективний діаметр молекули, n – концентрація молекул.

Закон Фіка: у процесі дифузії маса речовини, яка перенесена через елемент площі Δs за час Δt, дорівнює

$$m = -D\frac{d\rho}{dr}\Delta s\,\Delta t\,,$$

де $d\rho/dr$ – градієнт густини речовини в напрямку, перпендикулярному до Δs; D – коефіцієнт дифузії.

Закон Фур'є: у процесі теплопередачі кількість теплоти, яка перенесена через елемент площі Δs за час Δt внаслідок теплопровідності, дорівнює

$$Q = -\chi\frac{dT}{dr}\,\Delta s\,\Delta t\,,$$

де dT/dr – градієнт температури в напрямку, перпендикулярному до Δs; χ – коефіцієнт теплопровідності.

Закон Ньютона для внутрішнього тертя: сила, що діє на елемент площі Δs між двома шарами речовини, які рухаються з різними швидкостями (сила внутрішнього тертя)

$$F = -\eta\frac{d\upsilon}{dr}\Delta s\,,$$

де $d\upsilon/dr$ – градієнт швидкості течії в напрямку, перпендикулярному до Δs; η – коефіцієнт в'язкості.

Для газу:

$$D = \frac{1}{3}\langle\upsilon\rangle\lambda, \qquad \eta = \frac{1}{3}\langle\upsilon\rangle\lambda\,\rho, \qquad \chi = \frac{1}{3}\langle\upsilon\rangle\lambda\,\rho\,c_V$$

де $\langle\upsilon\rangle$ – середня швидкість молекул, c_V – питома теплоємність газу при сталому об'ємі.

Приклади розв'язку задач

Приклад 1. *У балоні знаходиться кисень масою $m = 16$ мг. Через отвір кожну секунду вилітає ДN = 1 млрд. молекул. За який час t газ витече з балону.*

Розв'язок:

Кількість речовини ν, яка відповідає масі m, визначається за формулою:

$$\nu = \frac{m}{M}, \qquad (1)$$

де M – молярна маса речовини; $M(O_2) = 0.032$ кг/моль.

Згідно з законом Авогадро в одному молі будь-якої речовини міститься однакова кількість молекул – $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. Тоді, в речовині масою m, кількість молекул N дорівнює

$$N = \nu N_A = \frac{m}{M} N_A. \qquad (2)$$

Якщо за одну секунду з балону вилітає ΔN молекул, то весь газ витече за час

$$t = \frac{N}{\Delta N} = \frac{m N_A}{M \Delta N} \approx 3 \cdot 10^{11} \quad (c).$$

Приклад 2. У *балоні об'ємом $V = 15$ л знаходиться аргон. Тиск у балоні $p_1 = 600$ кПа, температура $T_1 = 300$ К. Коли з балону відібрали певну кількість газу, тиск у ньому знизився до $p_2 = 400$ кПа, а температура – до $T_2 = 260$ К. Визначити масу m аргону, яку було відібрано.*

Ar
$V = 0.015$ м^3
$p_1 = 6 \cdot 10^5$ Па
$p_2 = 4 \cdot 10^5$ Па
$T_1 = 300$ К
$T_2 = 260$ К
m - ?

Розв'язок:

Припустимо, що спочатку у балоні знаходився аргон масою m_0. Тоді його тиск p_1, об'єм V і температура T_1 зв'язані між собою рівнянням Менделєєва-Клапейрона:

$$p_1 V = \frac{m_0}{M} R T_1, \qquad (1)$$

де M – молярна маса; для аргону $M(Ar) = 0.04$ кг/моль. Після того, як газ масою m було відібрано з балону, для газу, який залишився і має вже тиск p_2 та температуру T_2, можна записати

$$p_2 V = \frac{m_0 - m}{M} R T_2. \qquad (2)$$

З рівняння (2) випливає:

$$m = m_0 - \frac{M\,V\,p_2}{R\,T_2}. \qquad (3)$$

Знаходячи масу m_0 з рівняння (1), отримуємо

$$m_0 = \frac{M\,V\,p_1}{R\,T_1}.$$

Остаточно маємо

$$m = \frac{M\,V\,p_1}{R\,T_1} - \frac{M\,V\,p_2}{R\,T_2} = \frac{M\,V}{R\,T_1 T_2}\left(p_1 T_2 - p_2 T_1\right). \qquad (4)$$

Перевіримо розмірність отриманого виразу

$$[m] = \frac{\text{кг}\cdot\text{моль}^{-1}\cdot\text{м}^3}{\text{Дж}\cdot\text{моль}^{-1}\cdot\text{К}^{-1}\cdot\text{К}^2}\cdot\text{Па}\cdot\text{К} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^3\cdot\text{Па}}{\text{Дж}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^3\cdot\text{Н}\cdot\text{м}^{-2}}{\text{Н}\cdot\text{м}} = \text{кг}$$

Використовуючи формулу (4), знаходимо

$$m = \frac{0.04\cdot 0.015}{8.31\cdot 300\cdot 260}\left(6\cdot 10^5\cdot 260 - 4\cdot 10^5\cdot 300\right) \approx 3.3\times 10^{-2} \quad (\text{кг})$$

Приклад 3. *На рис.2.1 наведено VT-діаграму замкненого циклу, який здійснюється певною масою газу. Побудувати pT- та pV-діаграми.*

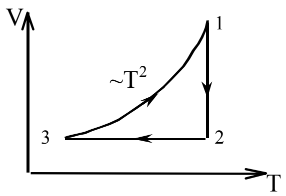

Рис.2.1

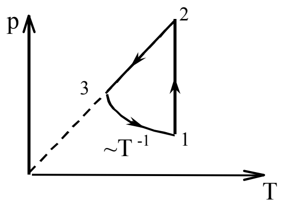

Рис.2.2

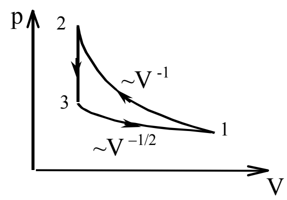

Рис.2.3

Розв’язок:

Розіб’ємо цикл на окремі процеси 1-2, 2-3 і 3-1 та розглянемо окремо, як змінювався стан газу на цих ділянках.

1-2: Під час цього процесу $T = \text{const}$, тому згідно з законом Бойля-Маріотта $pV = \text{const}$. Таким чином, $p \sim V^{-1}$. Крім того, так як у стані 1 об’єм газу більший, ніж у стані 2, то тиск газу в стані 1 має бути меншим, ніж у 2. Ці міркування дозволяють побудувати ділянки 1-2 на рис.2.2 та 2.3.

2-3: У даному випадку об'єм не змінювався, тому згідно з законом Шарля $\frac{p}{T} = \text{const}$, отже $p \sim T$. До того ж, так як у стані 2 температура більша, ніж у стані 3, то під час процесу 2-3 тиск зменшується – див. рис. 2.2 та 2.3.

3-1: У цьому процесі $V = aT^2$, де a – стала. Для постійної маси газу виконується співвідношення $\frac{Vp}{T} = \text{const}$, тому $\frac{aT^2 p}{T} = \text{const}$, тобто $p \sim T^{-1}$. Згідно рис.2.1, $T \sim \sqrt{V}$ і тому $p \sim V^{-1/2}$ і це дозволяє закінчити побудову графіків на рис.2.2 та 2.3.

Приклад 4. У *скільки разів збільшиться об'єм, який займає* $\nu = 0.4$ *моль водню, при ізотермічному розширенні, якщо при цьому газ отримав теплоту* $Q = 800$ *Дж ? Температура водню* $T = 300$ *К* .

H_2
$\nu = 0.4$ моль
$Q = 800$ Дж
$T = 300$ К
V_2/V_1 - ?

Відповідно до першого принципу термодинаміки
$$Q = \Delta U + A, \tag{1}$$
де Q – кількість теплоти, яка передана газу, A – робота, виконана газом; ΔU – зміна внутрішньої енергії газу:
$$\Delta U = \nu C_V \Delta T, \tag{2}$$
де ν – кількість речовини, C_V – молярна теплоємність газу при сталому об'ємі, ΔT – зміна температури газу. За умовою процес відбувався ізотермічно, тобто $\Delta T = 0$, отже і $\Delta U = 0$. Враховуючи це, рівняння (1) для ізотермічного процесу можна переписати у вигляді
$$Q = A. \tag{3}$$

За означенням, робота, виконана газом при зміні його об'єму від V_1 до V_2, дорівнює
$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV, \tag{4}$$
де p – тиск газу. Спираючись на рівняння Менделєєва-Клапейрона,

можемо записати

$$p = \frac{\nu R T}{V}. \qquad (5)$$

Підставляючи вираз (5) у формулу (4) і враховуючи, що при ізотермічному процесі добуток $\nu R T$ залишається сталим, отримуємо:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu R T}{V} dV = \nu R T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu R T \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = \nu R T \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right). \qquad (5)$$

З рівняння (5), враховуючи співвідношення (3), отримуємо

$$\frac{V_2}{V_1} = \exp\left(\frac{Q}{\nu R T}\right) \approx 2.23 .$$

Приклад 5. *В двох теплоізольованих циліндрах об'ємами $V_1 = 3$ л і $V_2 = 5$ л знаходяться однакові гази, які мають тиски $p_1 = 100$ кПа і $p_2 = 150$ кПа та температури $T_1 = 300$ К і $T_2 = 320$ К, відповідно. Циліндри сполучені трубкою з краном. Кран відкривають і гази змішуються.. Яка температура T і який тиск p встановляться в циліндрах після змішування? Об'ємом трубки знехтувати.*

$V_1 = 3 \cdot 10^{-3}$ м^3
$V_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ м^3
$p_1 = 1 \cdot 10^5$ Па
$p_2 = 1.5 \cdot 10^5$ Па
$T_1 = 300$ К
$T_2 = 320$ К
T - ? p - ?

Розв'язок:

Система з двох циліндрів з газом теплоізольована, тому кількість теплоти, яка їй передається, дорівнює нулеві. Сумарний об'єм системи також не змінюється, тому дорівнює нулеві і загальна робота, виконана газом ($dA = p\,dV = 0$). Тому, згідно з першим принципом термодинаміки повна внутрішня енергія системи не змінюється. Отже

$$U_1 + U_2 = U = \text{const}, \qquad (1)$$

де U_1 і U_2 – внутрішні енергії газів в першому та другому циліндрах до змішування, відповідно; U – внутрішня енергія системи після змішування.

Якщо розглядати гази як ідеальні, то для U_1, U_2 та U можемо записати

$$U_1 = \nu_1 C_v T_1,$$
$$U_2 = \nu_2 C_v T_2, \qquad (2)$$
$$U = (\nu_1 + \nu_2) C_v T,$$

де ν_1 та ν_2 – число молів газу в першому та другому циліндрах, C_v – молярна теплоємність газу при сталому об'ємі. Користуючись рівнянням Менделєєва-Клапейрона, для ν_1 та ν_2 отримуємо:

$$\nu_1 = \frac{m_1}{M} = \frac{p_1 V_1}{R T_1}, \qquad \nu_2 = \frac{p_2 V_2}{R T_2}. \qquad (3)$$

Підставляючи вирази (2) та (3) у рівність (1), маємо

$$\frac{p_1 V_1}{R T_1} C_V T_1 + \frac{p_2 V_2}{R T_2} C_V T_2 = \left(\frac{p_1 V_1}{R T_1} + \frac{p_2 V_2}{R T_2} \right) C_V T,$$

звідки

$$T = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{\dfrac{p_1 V_1}{T_1} + \dfrac{p_1 V_1}{T_2}} = \frac{(p_1 V_1 + p_2 V_2) T_1 T_2}{p_1 V_1 T_2 + p_2 V_2 T_1} \qquad (4)$$

Тиск, який встановиться після змішування, можна знайти, скориставшись законом Дальтона

$$p = p_1^{/} + p_2^{/} = \frac{\nu_1 R T}{V_1 + V_2} + \frac{\nu_2 R T}{V_1 + V_2}, \qquad (5)$$

де $p_1^{/}$ та $p_2^{/}$ - парціальні тиски газів з першого та другого циліндрів. Підставляючи у формулу (5) вирази (3) та (4), остаточно маємо

$$p = \frac{R}{V_1 + V_2} \left(\frac{p_1 V_1}{R T_1} + \frac{p_2 V_2}{R T_2} \right) \frac{(p_1 V_1 + p_2 V_{21}) T_1 T_2}{(p_1 V_1 T_2 + p_2 V_2 T_1)} = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}. \qquad (6)$$

Користуючись формулами (4) та (6), знаходимо:

$$T = \frac{\left(10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3} + 1.5 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}\right) \cdot 300 \cdot 320}{10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 320 + 1.5 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 300} \approx 314 \quad (\text{K}),$$

$$p = \frac{10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3} + 1.5 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-3}} \approx 1.31 \cdot 10^5 \quad (\text{Па}).$$

Приклад 6. *Азот масою* $m = 2\,кг$*, який має температуру* $T = 288\,К$*, адіабатично стискають, збільшуючи тиск в* $n = 10$ *разів. Визначити роботу, витрачену на стиснення газу.*

N_2
$m = 2$ кг
$T = 288$ К
$n = 10$
$\Delta Q = 0$
A - ?

Розв'язок:

Робота A, яка виконується над газом зовнішньою силою при його стисканні від об'єму V_1 до об'єму V_2, може бути визначена за формулою

$$A = -\int_{V_1}^{V_2} p\,dV . \qquad (1)$$

При адіабатичному процесі тиск газу p і його об'єм V пов'язані між собою співвідношенням:

$$p\,V^{\gamma} = \mathrm{const}, \qquad (2)$$

де γ – відношення теплоємності газу при сталому тиску до теплоємності при сталому об'ємі. При умовах, близьких до нормальних, двоатомні молекули азоту беруть участь у поступальному та обертальному рухах, отже $\gamma = 1.4$.

З рівняння (2) випливає, що

$$p = \frac{\mathrm{const}}{V^{\gamma}},$$

таким чином

$$A = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{const}}{V^{\gamma}}\,dV = -\mathrm{const}\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^{\gamma}} = -\mathrm{const}\frac{1}{1-\gamma}V^{1-\gamma}\Big|_{V_1}^{V_2} =$$

$$= \mathrm{const}\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{1}{V_1^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_2^{\gamma-1}}\right) = \frac{1}{1-\gamma}\,\frac{\mathrm{const}}{V_1^{\gamma}}\,V_1\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]. \qquad (3)$$

З рівняння (2) випливає, що

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$p_1 = \frac{\mathrm{const}}{V_1^{\gamma}}, \qquad (4)$$

де p_1 і p_2 – тиски газу у початковому (коли він мав об'єм V_1) та кінцевому станах, відповідно.

З врахуванням рівностей (4) вираз (3) прийме вигляд

$$A = \frac{1}{1-\gamma}\, p_1 V_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]. \qquad (5)$$

У початковому стані газ мав температуру T, згідно з рівнянням Менделєєва-Клапейрона:

$$p_1 V_1 = (m/M) R\,T\,. \qquad (6)$$

Враховуючи також, що згідно з умовою задачі $p_2/p_1 = n$, остаточно отримуємо

$$A = \frac{m R T}{(1-\gamma) M}\left[1 - n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] \approx 3.98 \cdot 10^5 \quad (\text{Дж}).$$

При обчисленні враховано, що молярна маса азоту $M(N_2) = 0.028$ кг/моль.

Приклад 7. *Циліндрична посудина закрита поршнем, який за допомогою пружини з'єднаний з дном посудини – див. рис.2.4. Всередині посудини знаходиться ν молей ідеального газу. Температура газу починає зростати. Записати рівняння процесу, що відбувається з газом. Знайти залежність теплоємності С ідеального газу від положення поршня. Площа поперечного перерізу посудини S, жорсткість пружини k_0, зовнішній тиск весь час сталий і дорівнює p_0. Вважати, що пружина не деформована у випадку, коли поршень віддалений на відстань h від дна посудини.*

Розв'язок:

За означенням, теплоємність С дорівнює відношенню кількості теплоти dQ, яку потрібно надати тілу, щоб змінити його температуру на величину dT, до цього інтервалу температур:

$$C = \frac{dQ}{dT}\,. \qquad (1)$$

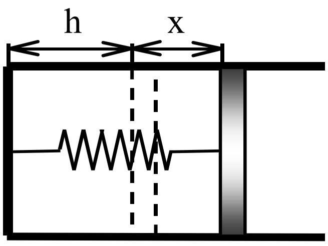

Рис.2.4

Згідно з першим принципом термодинаміки для газу справедлива формула

$$dQ = dU + p\,dV\,, \qquad (2)$$

де dU – зміна внутрішньої енергії газу при наданні йому кількості теплоти dQ, $p\,dV$ – робота, виконана газом. Для ідеального газу

$$d\,U = \nu\,C_v\,d\,T\,, \qquad (3)$$

де ν – кількість речовини газу, C_V – молярна теплоємність при сталому об'ємі (величина, яка залежить від кількості ступенів вільності молекули газу).

Згідно з рівнянням Менделєєва-Клапейрона

$$pV = \nu\,R\,T\,. \qquad (4)$$

Продиференціювавши цей вираз, отримаємо

$$p\,dV + V\,dp = \nu\,R\,dT\,. \qquad (5)$$

В нашому випадку газ, нагріваючись, буде розширюватися і при будь-якому відхиленні поршня x від положення рівноваги тиск у газі буде складатися з зовнішнього тиску і тиску з боку поршня

$$p(x) = p_0 + \frac{k_0\,x}{S}\,, \qquad (6)$$

де (k_0 x) – сила пружності, що діє на поршень з боку деформованої пружини. Таким чином, при зміні відхилення поршня на dx тиск змінюється на величину

$$d\,p(x) = \frac{k_0\,dx}{S} = \frac{k_0\,dV}{S^2}\,, \qquad (7)$$

де $S\,dx = dV$ – зміна об'єму, який займає газ. Інтегруючи рівняння (7), отримуємо

$$p = \frac{k_0\,V}{S^2} + A\,, \qquad (8)$$

де $V = (h + x)S$ – об'єм, який займає газ; A – стала інтегрування. Її легко визначити з граничних умов: при $x = 0$ поршень знаходиться у положенні рівноваги, пружина не деформована, тиск газу дорівнює зовнішньому тиску, тобто $p = p_0$ і $V = V_0 = h\,S$. Таким чином

$$p_0 = \frac{k_0 V_0}{S^2} + A,$$

$$A = p_0 - \frac{k_0 V_0}{S},$$

і отже, рівняння процесу, в якому бере участь газ, має вигляд

$$\frac{p - p_0}{V - V_0} = \frac{k_0}{S^2} = \text{const}. \tag{9}$$

Підставивши вираз (7) у рівняння (5) та врахувавши співвідношення (6), матимемо

$$p\,dV + V\frac{k_0\,dV}{S^2} = \nu R\,dT,$$

$$\left(1 + \frac{Vk_0}{pS^2}\right)p\,dV = \nu R\ dT,$$

$$\left[1 + \frac{(h+x)Sk_0}{\left(p_0 + \frac{k_0 x}{S}\right)S^2}\right]p\,dV = \left[1 + \frac{(h+x)k_0}{(Sp_0 + k_0 x)}\right]p\,dV = \nu R\ dT,$$

$$p\,dV = \nu R\left[1 + \frac{(h+x)k_0}{(Sp_0 + k_0 x)}\right]^{-1} dT. \tag{10}$$

Підставляючи вирази (10) та (3) у рівняння (2), отримуємо

$$dQ = \nu C_v\,dT + \frac{\nu R}{\left[1 + \frac{(h+x)k_0}{(Sp_0 + k_0 x)}\right]}dT. \tag{11}$$

Остаточно, порівнюючи вирази (1) та (11), можемо записати

$$C = \nu\left(C_v + \frac{R}{\left[1 + \frac{(h+x)k_0}{(Sp_0 + k_0 x)}\right]}\right).$$

Приклад 8. *Теплова машина здійснює цикл, який складається з ізотерми, ізобари та ізохори. Робочим тілом машини є ідеальний газу з показником адіабати* $г = 1.4$ *Максимальна температура газу при цьому* $T_{max} = 600\ K$, *мінімальна –* $T_{min} = 300\ K$; *максимальний об'єм, який займає газ –* $V_{max} = 2$ *л* , *мінімальний –* $V_{min} = 1$ *л* . *Обчислити ККД η цієї машини.*

$\gamma = 1.4$

$V_{max} = 2 \cdot 10^{-3}$ м^3

$V_{min} = 1 \cdot 10^{-3}$ м^3

$T_{max} = 600$ K

$T_{min} = 300$ K

η - ?

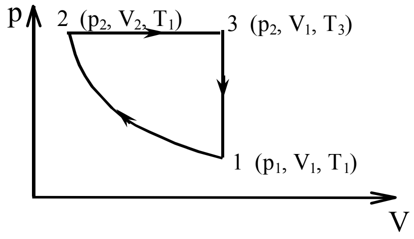

Рис.2.5

Розв'язок:

Діаграму циклу в координатах p-V подано на рис.2.5: процес 1-2 ізотермічний ($T_2 = T_1$), 2-3 – ізобаричний ($p_3 = p_2$), 3-1 – ізохоричний ($V_3 = V_1$). Спочатку визначимо, в які моменти циклу температура та об'єм набуватимуть максимальних і мінімальних значень. З діаграми видно, що V_{max}=V_1, V_{min}=V_2. Згідно з законом Гей-Люссака $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}$, або, з врахуванням вигляду циклу, $\frac{V_2}{T_1} = \frac{V_1}{T_3}$. Таким чином $(T_3/T_1) = (V_1/V_2) > 1$ і отже $T_{max} = T_3$, $T_{min} = T_1$.

Коефіцієнт корисної дії теплової машини η дорівнює

$$\eta = (Q_1 - Q_2)/Q_1 , \qquad (1)$$

де Q_1 і Q_2 – кількості теплоти, отримані та віддані газом за цикл, відповідно. Для знаходження цих величин розглянемо кожен з процесів, з яких складається цикл, окремо.

1-2: При ізотермічній зміні об'єму, кількість теплоти, отримана газом, визначається за формулою (див. приклад 4)

$$Q_{1-2} = \nu R T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right), \qquad (2)$$

де ν – кількість речовини газу. Так як в нашому випадку $V_2 < V_1$, то величина Q_{1-2} – від'ємна, тобто під час ізотермічного стискування газ віддає теплоту.

2-3: При ізобаричному процесі

$$Q_{2-3} = \nu C_p (T_3 - T_2) = \nu C_p (T_3 - T_1), \qquad (3)$$

де C_p – молярна теплоємність газу при сталому тиску. Так як $T_3 > T_1$, то під час цього процесу газ отримує теплоту.

3-1: При ізохоричному процесі

$$Q_{3-1} = \nu C_v (T_1 - T_3), \qquad (4)$$

де C_V – молярна теплоємність газу при сталому об'ємі. Очевидно, що $Q_{3-1} < 0$.

Отже

$$Q_1 = Q_{2-3}, \quad Q_2 = -(Q_{1-2} + Q_{3-1}). \qquad (5)$$

Таким чином, з урахуванням виразів (2-5), формула (1) прийме вигляд

$$\eta = \frac{\nu C_p (T_3 - T_1) - \nu R T_1 \ln(V_1/V_2) - \nu C_v (T_3 - T_1)}{\nu C_p (T_3 - T_1)} = \frac{(C_p - C_V)(T_3 - T_1) - R T_1 \ln(V_1/V_2)}{C_p (T_3 - T_1)}. \qquad (6)$$

Так як для ідеального газу справедливі співвідношення $C_p - C_V = R$, $\frac{R}{C_p} = 1 - \frac{C_V}{C_p} = 1 - \frac{1}{\gamma}$, то остаточно для ККД отримуємо

$$\eta = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\left(1 - \frac{T_{min}}{T_{max} - T_{min}} \ln\left(\frac{V_{max}}{V_{min}}\right)\right) \approx 0.09\,.$$

Приклад 9. *Водень знаходиться при температурі $T = 300\ K$. Знайти середню кінетичну енергію обертального руху $<\varepsilon_{об}>$ однієї молекули, а також сумарну кінетичну енергію $E_к$ всіх молекул газу, кількість речовини якого $н = 0.5$ моль.*

H_2 $T = 300$ K $\nu = 0.5$ моль	Розв’язок:
$<\varepsilon_{об}>$ - ? $E_к$ - ?	

Згідно з теоремою Больцмана про рівнорозподіл енергії за ступенями вільності на кожен ступінь вільності однієї молекули газу припадає середня енергія

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{2}\, k\, T\,. \qquad (1)$$

Молекула водню складається з двох атомів; така молекула має два обертальні ступені вільності. Таким чином, середня енергія обертального руху молекули водню:

$$\langle \varepsilon_{об} \rangle = 2 \cdot \frac{1}{2}\, k\, T = k\, T \approx 4.14 \cdot 10^{-21} \quad (Дж).$$

При такій температурі, як в умові задачі, молекула водню бере участь лише у поступальному та обертальному рухах, оскільки ефективне збудження коливальних ступенів вільності відбувається лише при температурах, більших $6000\,K$. Отже, загальна кількість ступенів вільності в цьому випадку – п’ять (3 поступальних і 2 обертальних), а загальна кінетична енергія однієї молекули

$$\langle \varepsilon_к \rangle = \frac{5}{2}\, k\, T\,. \qquad (2)$$

Сумарна кінетична енергія N молекул

$$E_к = N \langle \varepsilon_к \rangle\,. \qquad (3)$$

Згідно з законом Авогадро, кількості речовини ν відповідає ($N_A \nu$) молекул. Тому

$$E_к = N_A \nu \frac{5}{2} k\, T = \frac{5}{2}\, \nu R\, T \approx 3116 \quad (Дж).$$

Приклад 10. *Використовуючи функцію розподілу молекул за модулями швидкостей, отримати вираз для середньоквадратичної швидкості.*

Розв’язок:

Функція розподілу молекул за модулями швидкостей (функція розподілу Максвелла) має вигляд

$$dN(\upsilon)=N\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right)4\pi\upsilon^2\,d\upsilon. \qquad (1)$$

Ця функція визначає кількість молекул dN, модуль швидкості яких знаходиться в інтервалі $[\upsilon,\ \upsilon+d\upsilon]$ при даній температурі T. При цьому загальна кількість молекул N; m_0 – маса однієї молекули.

За визначенням, середньоквадратична швидкість $\upsilon_{КВ}$ є

$$\upsilon_{кв}=\sqrt{\left\langle\upsilon^2\right\rangle}=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}\upsilon_i^2}{N}}, \qquad (2)$$

де $\left\langle\upsilon^2\right\rangle$ – середнє значення квадрату швидкості молекули. Якщо врахувати, що деякі молекули мають однакові швидкості, то вираз для $\left\langle\upsilon^2\right\rangle$ можна записати у наступному вигляді:

$$\left\langle\upsilon^2\right\rangle=\frac{1}{N}\sum_j \Delta N(\upsilon_j)\upsilon_j^2\ , \qquad (3)$$

де $\Delta N(\upsilon_j)$ – кількість молекул, швидкість яких дорівнює υ_j. Підсумовування у формулі (3) відбувається по різним значенням величини швидкості молекул, тоді як в (2) підсумовування здійснюється по номерам молекул. У загальному випадку модуль швидкості молекули може бути будь-якої величиною – від нуля до нескінченності. З врахуванням цього, суму у формулі (3) можна замінити інтегралом і для значення величини $\Delta N(\upsilon_j)$ використати вираз (1), тобто

$$\left\langle\upsilon^2\right\rangle=\frac{1}{N}\int\limits_0^\infty \upsilon^2\,dN(\upsilon)=\frac{1}{N}\int\limits_0^\infty \upsilon^2\,N\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right)4\pi\upsilon^2\,d\upsilon. \qquad (4)$$

Виносячи за знак інтегралу всі величини, які не залежать від υ, отримуємо

$$\left\langle\upsilon^2\right\rangle=\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}4\pi\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right)\upsilon^4\,d\upsilon. \qquad (5)$$

Введемо нову змінну: $x = \sqrt{m_0/(2kT)}\,\upsilon$. Отже $d\upsilon = \sqrt{(2kT)/m_0}\,dx$, $\upsilon^4 = \left(\frac{2kT}{m_0}\right)^2 x^4$, і тоді

$$\langle \upsilon^2 \rangle = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \left(\frac{2kT}{m_0}\right)^{\frac{5}{2}} \int_0^\infty x^4 \exp(-x^2)dx. \qquad (6)$$

Значення інтегралу отримаємо за допомогою методу інтегрування частинами:

$$\int_0^\infty x^4 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_0^\infty x^3 d\left(e^{-x^2}\right) = -\frac{1}{2}x^3 e^{-x^2}\Big|_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty 3x^2 e^{-x^2} dx =$$

$$= -\frac{3}{4}\int_0^\infty x^2 d\left(e^{-x^2}\right) = -\frac{3}{4}x^2 e^{-x^2}\Big|_0^\infty + \frac{3}{4}\int_0^\infty 2x\, e^{-x^2} dx = -\frac{3}{4}\int_0^\infty x\, d\left(e^{-x^2}\right) =$$

$$= -\frac{3}{4}xe^{-x^2}\Big|_0^\infty + \frac{3}{4}\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}. \qquad (6)$$

Таким чином

$$\langle \upsilon^2 \rangle = \frac{4\pi}{\pi^{3/2}} \frac{2kT}{m_0} \frac{3\sqrt{\pi}}{8} = \frac{3k\pi}{m_0},$$

$$\upsilon_{кв} = \sqrt{\frac{3k\pi}{m_0}}.$$

Приклад 11. *Визначити зміну ентропії при нагріванні $m = 100$ г азоту від $t_1 = 17^\circ$ до $t_2 = 100^\circ$ при сталому тиску.*

N_2
$p = const$
$m = 0.1$ кг
$T_1 = 290$ К
$T_2 = 373$ К
ΔS - ?

Розв'язок:

Зміна ентропії ΔS при нагріванні тіла від температури T_1 до T_2 описується виразом:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T}, \qquad (1)$$

де Q – кількість теплоти, яка передається тілу.

При ізобаричному процесі для зміни температури тіла масою m на величину dT необхідна кількість теплоти:

$$d\,Q = m\,C_p\;d\,T\,, \tag{2}$$

де C_p – питома теплоємність при постійному тиску. Якщо вважати газ ідеальним, то

$$C_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M}\,, \tag{3}$$

де M – молярна маса газу, $M(N_2) = 0.028$ кг/моль; i – кількість ступенів вільності молекули газу. Оскільки азот – двоатомний газ, то для нього при вказаних температурах $i = 5$. Таким чином:

$$C_p = \frac{7}{2}\frac{R}{M}\,. \tag{4}$$

Підставляючи вираз (2) у формулу (1) та враховуючи рівність (4), отримуємо

$$\Delta S = \int\limits_{T_1}^{T_2} \frac{7\,R\,m\,dT}{2\,M\,T} = \frac{7\,m\,R}{2\,M}\int\limits_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = \frac{7\,m\,R}{2\,M}\ln\!\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \approx 26 \quad \left(\frac{\text{Дж}}{\text{К}}\right)$$

Приклад 12. *При політропічному процесі молярна теплоємність деякої кількості газу Ван-дер-Ваальса дорівнює С. Отримати рівняння цього політропічного процесу.*

Розв'язок:

Згідно з означенням політропічного процесу, його теплоємність С не залежить від температури. Отже, при політропічній зміні стану газу Ван-дер-Ваальса кількість теплоти dQ, яка передається тілу, і зміна його температури dT пов'язані співвідношенням

$$d\,Q = \nu\,C\,dT\,, \tag{1}$$

де ν – кількість речовини газу. З другого боку, згідно з першим принципом термодинаміки

$$dQ = dU + p\,dV\,, \tag{2}$$

де p – тиск газу, V – об'єм, який він займає, U – внутрішня енергія газу. Так як для газу Ван-дер-Ваальса справедлива формула $U = \nu\,C_V T - \left(a\,\nu^2\right)/V$, то

$$dU = \nu C_V dT + \frac{a\nu^2}{V^2} dV, \qquad (3)$$

де C_V – молярна теплоємність ідеального газу при сталому об'ємі. Підставляючи вирази (1) та (3) у формулу (2), отримуємо

$$\nu C\, dT = \nu C_V dT + \frac{a\nu^2}{V^2} dV + p\, dV = \nu C_V dT + \left(\frac{a\nu^2}{V^2} + p\right) dV. \qquad (4)$$

Так як з рівняння стану реального газу випливає, що $\left(p + \frac{a\nu^2}{V^2}\right) = \frac{\nu R T}{(V - \nu b)}$, то спираючись на рівняння (4) можемо записати

$$\nu C\, dT = \nu C_V dT + \frac{\nu R T}{(V - \nu b)} dV,$$

$$(C - C_V)\frac{dT}{T} = \frac{R}{(V - \nu b)} dV,$$

$$(C - C_V)\ln T = R \ln(V - \nu b) + \mathrm{const}',$$

$$T^{\frac{(C - C_V)}{R}} (V - \nu b)^{-1} = \mathrm{const}. \qquad (5)$$

Співвідношення (5) і є рівнянням політропічного процесу газу Ван-дер-Ваальса. За допомогою рівняння стану його можна перетворити до більш звичного вигляду: так як $T = \left(p + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)\frac{(V - \nu b)}{\nu R}$, то

$$\left\{\left(p + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)\frac{(V - \nu b)}{\nu R}\right\}^{\frac{(C - C_V)}{R}} (V - \nu b)^{-1} = \mathrm{const}. \qquad (6)$$

Враховуючи, що процес відбувається при сталій кількості газу, остаточно отримуємо

$$\left(p + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)(V - \nu b)^{\frac{C - C_V - R}{C - C_V}} = \mathrm{const}.$$

Приклад 13. *При температурі T=273 K водень масою $m = 2$ г займає об'єм $V = 2.5$ л. Визначити середню кількість $\langle z \rangle$ зіткнень молекул водню за час ф= 1 с.*

H_2 $m = 2 \cdot 10^{-3}$ кг $V = 2.5 \cdot 10^{-3}$ м^3 $T = 273$ K $\tau = 1$ с	Розв'язок:
$\langle z \rangle$ - ?	

Середню кількість зіткнень можна визначити як відношення повного шляху L, який пройде молекула за час τ, до середньої довжини вільного пробігу молекули λ:

$$\langle z \rangle = L/\lambda \, . \qquad (1)$$

В свою чергу, для L можемо записати:

$$L = \langle \upsilon \rangle \, \tau \, , \qquad (2)$$

де $\langle \upsilon \rangle$ – середня швидкість молекули, яка визначається співвідношенням

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8\,R\,T}{\pi\,M}} \, , \qquad (3)$$

T – температура газу; M – молярна маса газу, для водню $M(H_2) = 2 \cdot 10^{-3}$ кг / моль.

Для величини середньої довжини вільного пробігу молекули справедливий вираз

$$\lambda = \left(\sqrt{2}\, \pi\, \sigma^2\, n \right)^{-1} , \qquad (4)$$

де σ – ефективний діаметр молекули (для молекули водню $\sigma = 2.3 \cdot 10^{-10}$ м); n – концентрація молекул:

$$n = \frac{N}{V} \qquad (5)$$

(N – загальна кількість молекул газу; V – об'єм, який займає цей газ).

Згідно з законом Авогадро, в одному молі речовини міститься N_A молекул. Тому кількість молекул у речовині масою m дорівнює:

$$N = \frac{m}{M} N_A \, . \qquad (6)$$

Підставляючи вираз (2) в (1) та враховуючи формули (3-6), отримуємо:

$$\langle z\rangle = \frac{\langle \upsilon\rangle \tau}{\lambda} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\ \tau\ \frac{\sqrt{2}\,\pi\sigma^2\, m N_A}{MV} = \frac{4 m \tau N_A\, \sigma^2}{VM}\sqrt{\frac{RT\pi}{M}}\,. \qquad (7)$$

Перевіримо, чи є величина $\langle z\rangle$, отримана за формулою (7), безрозмірною:

$$[\langle z\rangle] = \frac{кг\cdot с\cdot моль^{-1}\cdot м^2}{м^3\cdot кг\cdot моль^{-1}}\left(\frac{Дж\cdot моль^{-1}\cdot К^{-1}\cdot К}{кг\cdot моль^{-1}}\right)^{1/2} = \frac{с}{м}\left(\frac{Дж}{кг}\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{с}{м}\left(\frac{Н\cdot м}{кг}\right)^{1/2} = \frac{с}{м}\left(\frac{кг\cdot м\cdot с^{-2}\cdot м}{кг}\right)^{1/2} = \frac{с}{м}\left(\frac{м^2}{с^2}\right)^{1/2} = 1.$$

Використовуючи формулу (7), знаходимо:

$$\langle z\rangle = \frac{4\cdot 2\cdot 10^{-3}\cdot 1\cdot 6.02\cdot 10^{23}\cdot (2.3\cdot 10^{-10})^2}{2.5\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^{-3}}\sqrt{\frac{8.31\cdot 273\cdot 3.14}{2\cdot 10^{-3}}} \approx 9.6\cdot 10^{10}$$

Приклад 14. *Простір між двома концентричними сферами радіусами R_1 та R_2 заповнений газом при високому тиску. Температури обох сфер сталі і дорівнюють відповідно T_1 та T_2. Визначити розподіл температури між сферами*

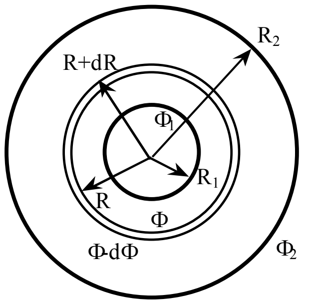

Рис.2.6

Розв'язок:

Для визначеності припустимо, що $R_2 > R_1$, $T_1 > T_2$. Для того, щоб визначити розподіл температури, тобто з'ясувати вигляд функції T(R), де R – відстань від центру сфер, виконаємо наступні дії. Виберемо тонкий сферичний шар товщиною dR і радіусом R ($R_1<R<R_2$), центр якого співпадає з центрами сфер – див. рис.2.6. Припустимо, що температура внутрішньої поверхні цього шару – T, а зовнішньої – $(T - dT)$. Рівняння для кількості теплоти, що проходить за одиницю часу через цей шар (рівняння теплопровідності) буде мати вигляд

$$\frac{dQ}{dt} = -\chi \frac{dT}{dR} \Delta S, \tag{1}$$

де χ – коефіцієнт теплопровідності газу, dT/dR – градієнт температури в місці знаходження сферичного шару, $\Delta S = 4\pi R^2$ – площа поверхні цього шару.

Очевидно, що в задачі розглядається стаціонарний випадок – температури обох сфер залишаються сталими. Це означає, що кількість теплоти, яку виділяє щосекунди в оточуючий простір зовнішня сфера, дорівнює кількості теплоти, яка щосекунди надходить до цієї сфери з боку газу. Одночасно, ця кількість теплоти дорівнює кількості теплоти, що проходить щосекунди через будь-яку сферу проміжного радіуса R. Тобто

$$\frac{dQ}{dt} = -\chi \frac{dT}{dR} 4\pi R^2 = \text{const},$$

отже

$$B_1 \frac{dR}{R^2} = -dT, \tag{2}$$

де $B_1 = \frac{dQ}{dt}\frac{1}{4\pi\chi}$ – стала. Інтегруючи рівняння (2), отримуємо

$$\frac{B_1}{R} = T + B_2, \tag{3}$$

де B_2 – стала інтегрування.

Сталі B_1 та B_2 можна обчислити, використавши граничні умови, а саме:

$$R = R_1,\ T = T_1,$$
$$R = R_2,\ T = T_2.$$

Отже

$$\begin{cases} \frac{B_1}{R_1} = T_1 + B_2 \\ \frac{B_1}{R_2} = T_2 + B_2 \end{cases}. \tag{3}$$

З останньої системи рівнянь знаходимо

$$B_1 = \frac{R_1 R_2 (T_1 - T_2)}{R_2 - R_1}, \quad B_2 = \frac{T_1 R_1 - T_2 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Таким чином, розподіл температури в просторі між сферами має вигляд

$$T(R) = \frac{R_1 R_2 (T_1 - T_2)}{R_2 - R_1} \cdot \frac{1}{R} + \frac{T_1 R_1 - T_2 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Приклад 15. *Визначити кількість елементарних комірок z в одиниці об'єму кристалу барію (гратка кубічна об'ємоцентрована). Густина барію $c = 3.5 \cdot 10^3$ кг/м^3.*

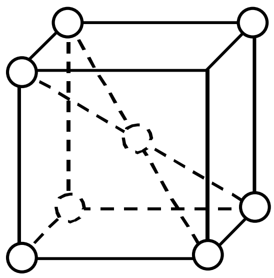

Рис.2.7

Ba, ОЦК
$\rho = 3.5 \cdot 10^3$ кг/м^3
z - ?

Розв'язок:

На рис.2.7 наведена елементарна комірка об'ємоцентрованої кубічної гратки. Підрахуємо, яка кількість n атомів припадає на одну елементарну комірку такої структури. Кожен з атомів у вершинах кубу знаходиться одночасно у восьми сусідніх комірках і тому на одну комірку припадає лише 1/8 цього атома. Всього таких атомів у вершинах вісім. Атом в центрі кубу повністю належить даній комірці. Таким чином $n = 8 \cdot \frac{1}{8} + 1 = 2$.

Масу m_i одного атому речовини можна обчислити як

$$m_i = M / N_A. \qquad (1)$$

Для барію $M(Ba) = 0.137$ кг/моль. Маса елементарної комірки m_k:

$$m_k = m_i\, n = (M n)/N_A. \qquad (2)$$

Об'єм елементарної комірки V_k:

$$V_k = \frac{m_k}{\rho} = \frac{M n}{N_A \rho}. \qquad (3)$$

Кількість комірок в одиниці об’єму

$$z = \frac{1}{V_k} = \frac{N_A \rho}{M n} \approx 7.67 \cdot 10^{27} \quad \left(м^3\right).$$

Задачі для самостійного розв’язку

1. Знайти кількість молекул в одиниці об’єму газу за нормальних умов (число Лошмідта).
2. Визначити масу m_i молекули води та кількість N молекул, що містяться в об'ємі $V = 1\ мм^3$ води. Оцінити радіус r_0 молекули води.
3. В кімнаті об'ємом V випарували m грамів ароматичної речовини з молярною масою M. Яка кількість N молекул цієї речовини потрапляє в легені людини об'ємом V_0 при кожному вдиханні?
4. Скільки електронів міститься в 1 $см^3$ свинцю? Густина свинцю $\rho = 11000$ кг/$м^3$.
5. У посудині об'ємом V знаходиться газ масою m. Визначити тиск газу, якщо середньоквадратична швидкість його молекул $\upsilon_{КВ}$?
6. Дано дві закриті посудини об'ємами V_1 і V_2. Тиск газу в першій посудині p_1, в другій – p_2. Температури газів однакові. Який тиск встановиться в кожній з посудин, якщо їх сполучити?
7. В посудині знаходиться кисень масою m_1 і водень масою m_2. У скільки разів зміниться тиск в посудині, якщо весь кисень прореагує з необхідною для цього частиною водню? Температура стала. Тиском водяної пари знехтувати.
8. Бульбашка повітря піднімається з дна басейну глибиною H. Знайти залежність радіуса бульбашки r від глибини h її місцезнаходження в даний момент часу, якщо її об'єм на дні дорівнює V_0. Сили поверхневого натягу не враховувати. Атмосферний тиск p_0, густина води в басейні ρ. Температура води не залежить від глибини.
9. Два з'єднані тонкою трубкою балони об'ємами $V_1 = 4$ л і $V_2 = 3$ л містять певну кількість азоту. Перший балон має незмінну температуру $t_1 = 27^\circ C$. До якої температури T потрібно нагріти другий балон для того, щоб в ньому залишилася тільки 1/3 загальної кількості азоту?

10. У тонкостінний стальний сферичний балон, маса якого $m_б$, нагнітають азот при температурі T. Знайти максимальну масу азоту, що може вміститися у балоні, якщо допустиме напруження стінок балона σ. Густина сталі ρ.

11. Фабричний димар виносить дим при температурі $T_1 = 333$ К. Визначити статичний тиск p, який зумовлює тягу в димарі. Температура зовнішнього повітря $T_2 = 263$ К, висота димаря $L = 50$ м. Зовнішній атмосферний тиск повітря вважати нормальним (101 кПа), густина повітря за нормальних умов $\rho_0 = 1.3\ кг/м^3$.

12. На рис.2.8 приведена VT-діаграма замкненого циклу. Побудувати pT і pV-діаграми.

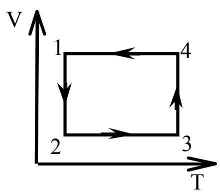

Рис.2.8

13. У балоні об'ємом V знаходиться гелій під тиском p_1 і при температурі T_1. Після того, як з балону вилучили гелій масою m, температура понизилася до T_2. Визначити тиск p_2 гелію, що залишився в балоні.

14. Газ здійснює цикл, pV-діаграма якого наведена на рис.2.9. Температура газу у станах 1 та 2 відома і дорівнює T_1 і T_2, відповідно. Знайти температуру в стані 3.

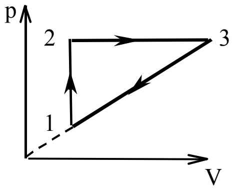

Рис.2.9

15. Вертикальний циліндр розділено рухомим горизонтальним поршнем масою m і площею S на дві частини. У верхній частині знаходиться азот при температурі T і тиску p, у нижній – кисень при температурі 2T. Посудину перевертають і встановлюють горизонтально. На скільки градусів необхідно змінити температуру азоту, щоб об'єми газів не змінилися?

16. На рис.2.10 наведена pV-діаграма замкненого циклу. Побудувати VT- та pT-діаграми.

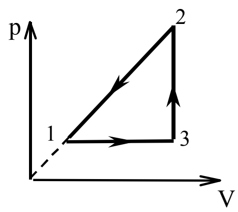

Рис.2.10

17. У процесі нагрівання газу при постійному об’ємі на 1 К його тиск збільшився на 0.2%. При якій початковій температурі знаходився газ.

18. В циліндрі об'ємом V під поршнем знахо-

диться газ при температурі T. Знайти роботу розширення газу при нагріванні його на ΔT. Маса поршня m, площа S, атмосферний тиск p_0.

19. Теплоізольована циліндрична посудина поділена невагомим поршнем на дві рівні частини об'ємом V кожна. З одного боку поршня міститься ідеальний газ, маса якого m, молекулярна маса M, молярна теплоємність при сталому тиску C_V. З другого боку поршня створено вакуум. Початкова температура газу T_0. Поршень відпускають, і він, вільно рухаючись, дає можливість газу заповнити весь об'єм циліндра. Після цього, поступово збільшуючи тиск на поршень, повільно повертають газ до початкового об'єму. Визначити зміну внутрішньої енергії газу ΔU в цьому процесі.

20. Тиск і об'єм певної маси кисню політропічно змінюються від значень $p_1 = 404$ кПа і $V_1 = 1$ л до $p_2 = 101$ кПа і $V_2 = 1$ л. Яку кількість теплоти Q отримав кисень від зовнішнього середовища? На яку величину ΔU змінилась його внутрішня енергія?

21. Якщо над ідеальним газом здійснюють процес A-B-C (рис.2.11), то газу надають кількість теплоти Q. Яку кількість теплоти надають газу при здійснені процесу A-D-C? Величини p_1, p_2, V_1 і V_2 відомі.

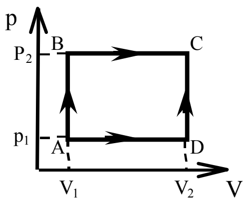

Рис.2.11

22. Кисень масою m займає об'єм V_1 і знаходиться під тиском p_1. Газ спочатку нагрівають при сталому тиску до об'єму V_2, а потім – при сталому об'ємі до тиску p_3. Знайти зміну ΔU внутрішньої енергії газу, виконану ним роботу A і передану газу кількість теплоти Q. Зобразити графік процесу.

23. В циліндрі знаходиться деяка маса водню при температурі T, яка займає об'єм V і має тиск p. При незмінному тиску над газом виконують роботу $A > 0$. Як змінилася температура водню?

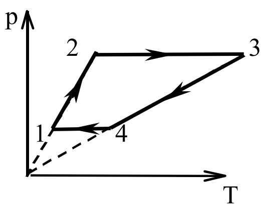

Рис.2.12

24. Кисень масою m виконує замкнений процес – див.рис.2.12. Температура газу в станах 1, 2, 3, і 4 дорівнює T_1, T_2, T_3, T_4, відповідно.

Яка робота A виконана газом за цикл? Яка кількість теплоти Q передана газу при цьому? Як змінилася внутрішня енергія газу при переході зі стану 1 у стан 3?

25. Ідеальний газ із показником адіабати γ розширили за законом $p = \alpha V$, де α – стала. Початковий об'єм газу V_0. У результаті розширення об'єм газу збільшився в η разів. Знайти зміну внутрішньої енергії ΔU, роботу розширення газу A, молярну теплоємність газу C_M.

26. Температура нагрівача теплового двигуна, який працює за циклом Карно, $T_H = 480\ K$, температура холодильника – $T_X = 290\ K$. Якою повинна стати температура нагрівача $T_H{}'$, щоб при тій самій температурі холодильника, ККД двигуна збільшився у 2 рази?

27. Теплова машина здійснює цикл, який складається з двох ізотерм з температурами T_1 і T_2 та двох ізохор з об'ємами V_1 і V_2. Обчислити ККД теплової машини, якщо її робочим тілом є ідеальний газ з показником адіабати γ.

28. Визначити показник адіабати γ ідеального газу, який при температурі $T = 350\ K$, тиску $p = 0.4$ Па займає об'єм $V = 300$ л і має теплоємність $c_V = 857$ Дж/К.

29. Визначити питомі теплоємності газу c_p і c_V, якщо відомо, що його молярна маса $M = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, а відношення питомих теплоємностей $c_p / c_V = 1.67$.

30. Знайти молярні теплоємності C_P і C_V ідеального триатомного газу. Розглянути всі можливі випадки.

31. Визначити рівняння процесу, при якому молярна теплоємність $C = C_p + R$. Газ вважати ідеальним.

32. В азоті знаходяться дрібні порошинки, рух яких можна розглядати як вух великих молекул. Маса кожної порошинки дорівнює $6 \cdot 10^{-10}$ г. Газ знаходиться при температурі $T = 400\ K$. Визначити середньоквадратичні швидкості $\upsilon_{кв}$, а також кінетичні енергії $\langle \varepsilon_{пост} \rangle$ поступального руху молекули азоту і порошинки.

33. Визначити повну енергію $\langle \varepsilon_{\text{повн}} \rangle$, а також енергію обертального руху $\langle \varepsilon_{\text{об}} \rangle$ однієї молекули аміаку при температурі $t = 27^{\circ}C$.

34. Використовуючи розподіл Максвелла, знайти найбільш ймовірну $\upsilon_{\text{ім}}$ та середню $\langle \upsilon \rangle$ швидкості молекул.

35. Обчислити найбільш ймовірну швидкість молекул газу, у якого при нормальному атмосферному тиску густина $\rho = 1.2$ кг/м^3.

36. Для газоподібного азоту знайти температуру, при якій швидкостям молекул υ_1 і υ_2 відповідають однакові значення функції розподілу Максвелла.

37. Знайти силу, що діє на частинки з боку однорідного поля, якщо концентрації цих частинок на двох рівнях, які розташовані на відстані Δh (вздовж силової лінії поля) відрізняються в η разів. Температура системи T.

38. При якій температурі газу кількість молекул, які мають швидкості, що знаходяться в заданому інтервалі $[\upsilon, \upsilon + d\upsilon]$ буде максимальним? Маса кожної молекули дорівнює m_0.

39. У довгій вертикальній посудині знаходиться газ, що складається з двох сортів молекул з масами m_1 і m_2 ($m_2 > m_1$). Концентрація цих молекул біля дна посудини – n_{10} і n_{20}, відповідно ($n_{20} > n_{10}$). Вважаючи, що по всій висоті підтримується одна й та ж температура T, знайти висоту, на якій концентрації молекул кожного сорту будуть однакові. Прискорення вільного падіння у всіх точках системи дорівнює g.

40. У скільки разів необхідно ізотермічно збільшити об'єм $\nu = 2$ молів ідеального газу, щоб його ентропія зросла на $\Delta S = 30$ Дж/К ?

41. У кожній з двох посудин 1 і 2 знаходиться ν молей ідеального газу, молярна теплоємність якого при сталому об'ємі дорівнює C_V. Відношення об'ємів посудин $V_2/V_1 = \alpha$, а відношення температур $T_1/T_2 = \beta$. Знайти різницю ентропій газів у посудинах.

42. У деякій посудині знаходяться N молекул. Подумки розділимо посудину на дві однакові половини A і B. Знайти ймовірність P і статистичну вагу Ω того, що в половині A знаходиться n молекул.

43. Гелій масою m адіабатично розширили в n разів, а потім ізобарично стиснули до початкового об'єму. Знайти приріст ентропії газу в цьому процесі. Газ вважати ідеальним.
44. Процес розширення ν молей газу з молярною теплоємністю при сталому об’ємі C_V відбувається таким чином, що тиск газу змінюється прямо пропорційно його об'єму. Знайти приріст ентропії газу при збільшені об'єму в α разів.
45. Нагріта вода масою m, температура якої дорівнює T_1, змішується в термостаті з такою самою масою холодної води, температура якої дорівнює T_2. Чому дорівнює загальна зміна ентропії в системі ΔS після встановлення рівноваги? Питома теплоємність води c.
46. Один моль кисню знаходиться при температурі $T = 350\ \text{K}$. Обчислити відносну похибку визначення внутрішньої енергії газу $\eta = \dfrac{U_{ід} - U_B}{U_B} \times 100\%$, де $U_{ід}$ – значення, отримане при розгляді газу як ідеального, U_B – як газу Ван-дерВаальса. Розрахунки виконати для двох значень об’єму: а) $V = 2$ л; б) $V = 0.2$ л.
47. Для води стала Ван-дер-Ваальса $b = 3.06 \cdot 10^{-5}\ м^3/моль$. Визначити критичний об’єм $m = 1$ кг води.
48. При якому тиску p густина газоподібного азоту, що має температуру $t = -73^\circ C$, становить сорок відсотків від густини води ρ_0 при кімнатній температурі ($\rho_0 = 10^3$ кг/м^3). Сталі Ван-дер-Ваальса для азоту $a = 0.136\ Н \cdot м^4/моль^2$, $b = 3.9 \times 10^{-5}\ м^3/моль$.
49. Дві посудини з об’ємами V_1 і V_2 сполучені трубкою з краном. Коли кран закритий, в кожній посудині міститься по одному молю газу Ван-дер-Ваальса. Температури газу в обох посудинах однакові. Наскільки зміниться температура газу якщо кран відкрити? Стінки посудини і трубки вважати теплонепроникними. Стала Ван-дер-Ваальса a і молярна теплоємність при сталому об’ємі C_V відомі.
50. Визначити, яка частина молекул газу: а) пролітає без зіткнень відстані, що перевищують середню довжину вільного пробігу λ; б) мають довжини вільного пробігу в інтервалі від λ до 2λ.

51. Яке гранична кількість молекул газу може знаходитись в сферичній посудині діаметром D, щоб між ними не відбувалося зіткнень. Діаметр молекули газу σ.
52. В результаті деякого процесу коефіцієнт в'язкості ідеального газу збільшився в α разів, а коефіцієнт дифузії – в β разів. Як змінився тиск газу?
53. Порівняти середню кількість ударів молекул повітря за час $\Delta t = 1\,\text{с}$ в зовнішнє і внутрішнє скло вікна – N_2 та N_1, відповідно. Вважати, що температура у кімнаті $t_1 = 20^\circ\,\text{C}$, а зовні – $t_2 = -20^\circ\,\text{C}$. Атмосферний тиск $p = 750\,\text{мм.рт.ст}$. Розмір скла $S = 45\,\text{см} \times 110\,\text{см}$.
54. В топці парового котла спалюється за годину маса $m = 200\,\text{кг}$ палива з питомою теплотою згорання $q = 41\,\text{МДж/кг}$. Визначити частку кількості теплоти, яка втрачається за рахунок теплообміну стін топки з навколишнім середовищем. Площа поверхня стін $S = 60\,\text{м}^2$, товщина стін $d = 750\,\text{мм}$, теплопровідність цегли $\chi = 0.6\,\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$, температури з зовнішнього та внутрішнього боків стіни відповідно дорівнюють $t_1 = 50^\circ\,\text{C}$ і $t_2 = 750^\circ\,\text{C}$.
55. Визначити кут φ, на який повернеться диск, підвішений на пружній нитці, якщо під ним на відстані $h = 1\,\text{см}$ обертається другий такий самий диск з кутовою швидкістю $\omega = 50\,\text{рад/с}$. Радіус дисків $R = 10\,\text{см}$, модуль кручення нитки $E = 10^{-5}\,\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{рад}^{-1}$, коефіцієнт внутрішнього тертя повітря $\eta = 1.8\times10^{-5}\,\text{кг}\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{м}^{-1}$. Крайовими ефектами знехтувати.
56. Знайти мінімальну відстань d між сусідніми атомами в кристалі у випадку: а) кубічної гранецентрованої гратки, б) кубічної об'ємоцентрованої гратки, в) простої кубічної гратки. Параметр гратки a.
57. Параметр кубічної гранецентрованої гратки кристалу кальцію дорівнює a. Знайти густину кристалу ρ.

Відповіді до задач

Механіка.

1. $< V >= \dfrac{2V_1(V_2+V_3)}{2V_1+V_2+V_3} \approx 19.9$ м/с . **2**. див. рис.3.1. **3**. $a=\dfrac{2S(n-1)}{t^2(n+1)}$.

4. $L=\dfrac{V_0^2\sin 2\alpha}{g}$,

$H=\dfrac{V_0^2\sin^2\alpha}{2g}$,

$T=\dfrac{2V_0\sin\alpha}{g}$,

$\beta=\mathrm{arctg}\left(\dfrac{V_0\sin\alpha-g\tau}{V_0\cos\alpha}\right)$.

5. а) S≈7.1 м; б) α=0°;

в) $\langle V\rangle\approx 14$ м/с . **6**. $V_A=0$,

$V_B=\sqrt{2}\,V$,

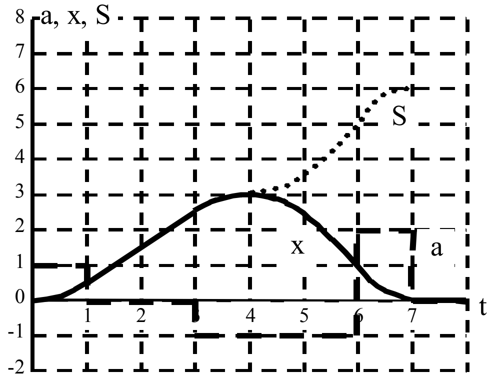

Рис.3.1.

$V_C=\sqrt{2+\sqrt{2}}\,V$, $V_D=2V$. **7**. $a=r\sqrt{4C^2+(B+2C\tau)^4}$. **8**. N=2,

$\alpha\approx 88^\circ$. **9**. $t\approx 1.1$ с . **10**. $T=\dfrac{4Mmg}{M+m}$. **11**. $a=\dfrac{g(M-\mu m)}{M+m}$.

12. $\tau=\dfrac{VP}{Fg}\approx 76.5$ с . **13**. вниз, $a=\left(1+\dfrac{M}{m}\right)g\sin\alpha$. **14**. $a_1\approx 0.2$ м/с^2 ,

$a_2\approx 3.0$ м/с^2 , $t\approx 0.84$ с . **15**. $k=\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}$. **16**. $n=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\mu g}{l}}\approx 0.7$ с$^{-1}$.

17. $\mu=\dfrac{V^2}{Rg}$, $\alpha=\mathrm{arctg}\left(\dfrac{Rg}{V^2}\right)$. **18**. $V=\sqrt{gR}$. **19**. а) $h\approx 3.2\cdot 10^4$ м ;

б) $h\approx 2.6\cdot 10^6$ м . **20**. Не зміняться.

21. $M_з=\dfrac{4\pi^2R^3}{\gamma T_з^2}\left(\dfrac{T_з}{\tau}+1\right)^2\approx 5.97\cdot 10^{24}$ кг . **22**. $A_T=-\mu m g l\cos\alpha$,

$A_{mg} = mgl\sin\alpha$, $P = \mu m g^2 \cos\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\tau$. **23**. A= -17.

24. $A = \dfrac{m t^2 g^2}{8\sin^2\alpha} \approx 48$ Дж. **25**. а) $A = \dfrac{\gamma m M h}{R_з(R_з + h)} \approx 1.7\cdot 10^7$ Дж;

б) $A = \dfrac{\gamma m M}{R_з} \approx 1.25\cdot 10^8$ Дж. **26**. $A = \dfrac{m g \mu L}{1 - \mu\,\mathrm{ctg}\alpha}$. **27**. $V = \Delta x\sqrt{\dfrac{k}{m}}$,

$h = \dfrac{k\Delta x^2}{2mg}$. **28.** $V_1 = \dfrac{mV_2 - MV_0}{M - m}$. **29**. $H = \dfrac{V^2}{2g}\left(1 + \dfrac{m}{M}\right)$.

30. $h = \dfrac{MV^2}{2g(M+m)}$. **31**. $V_1 = \dfrac{m}{M}V$, $V_2 = V$.

32. $V_2 = \sqrt{4V^2 + V_1^2} \approx 103$ м/с. **33**. $V_1 = V\sqrt{\dfrac{M-m}{M+m}}$,

$V_2 = V\sqrt{\dfrac{2m^2}{M(M+m)}}$, $\theta = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{M-m}{M+m}\right)$. **34**. $\alpha = 90^\circ$.

35. $h = \dfrac{M^2 L(1-\cos\alpha)}{(M+m)^2}$, $Q = gL(1-\cos\alpha)\dfrac{Mm}{M+m}$. **36**. $\eta = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$.

37. а) $I = \dfrac{1}{2}mR^2$; б) $I = \dfrac{3}{2}mR^2$. **38**. $I = \dfrac{m_1 m_2 L^2}{m_1 + m_2}$. **39.** $m \approx 3.06$ кг.

40. $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{1}{2\mu}\right)$. **41**. $\tau = \sqrt{\dfrac{2\pi N m R}{F}} \approx 2.2$ с.

42. $a = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m/2}g$. **43**. $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{l}} \approx 14\ \text{с}^{-1}$, $V = \dfrac{1}{2}\sqrt{3gl} \approx 1$ м/с.

44. $A = \dfrac{1}{4}m\omega_1\omega_2\left(L_1^2 - L_2^2\right)$. **45**. $F = m\sqrt{g^2 + \left(\omega^2 r\right)^2 + \left(2V'\varpi\right)^2}$. **46**. На схід, $\Delta l = \dfrac{2}{3}\omega h\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$. **47**. $L_0 = L\sqrt{\dfrac{1-\beta^2\sin^2\theta}{1-\beta^2}}$.

48. $V=\sqrt{V_1^2+V_2^2-\frac{V_1^2\,V_2^2}{c^2}}$. **49**. $V=c\sqrt{\left(2-\frac{\Delta t}{t}\right)\frac{\Delta t}{t}}\approx 0.6\cdot 10^8$ м/с.

51. $V=c\sqrt{1-\frac{m_0^2\,c^4}{\left(T+m_0c^2\right)^2}}$. **52**. $V=\sqrt{0.99}\,c$.

53. $p=\frac{1}{c}\sqrt{T\left(T+2\,m_0c^2\right)}$.

Молекулярна фізика.

1. 2.7×10^{25} м^3. **2**. $m_i\approx2.99\times10^{-26}$ кг; $N\approx3.34\times10^{19}$; $r_0\approx1.9\times10^{-10}$ м.

3. $N=\frac{V_0\,m\,N_A}{V\,M}$. **4**. 2.6×10^{24}. **5**. $p=\frac{m\,\upsilon_{кв}^2}{3\,V}$. **6**. $p=\frac{p_1V_1+p_2V_2}{V_1+V_2}$.

7. $\frac{p^{/}}{p}=\left(\frac{m_1}{M_1}+\frac{m_2}{M_2}\right)\left(\frac{8\,M_2}{8\,m_2-m_1}\right)$. **8**. $r=\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}\frac{(\rho gH+p_0)}{(\rho gh+p_0)}}$.

9. $T=2T_1\frac{V_2}{V_1}=450$ К. **10**. $m=\frac{2\,\sigma\,M(N_2)\,m_б}{3\,R\,T\,\rho}$. **11**. $p\approx1.4\cdot10^2$ Па.

12. Див.рис.3.2.

13. $p_2=\left(\frac{Mp_1V}{RT_1}-m\right)\frac{RT_2}{MV}$.

14. $T_3=\frac{T_2^2}{T_1}$.

15. $\Delta T=\frac{mgT}{pS}$.

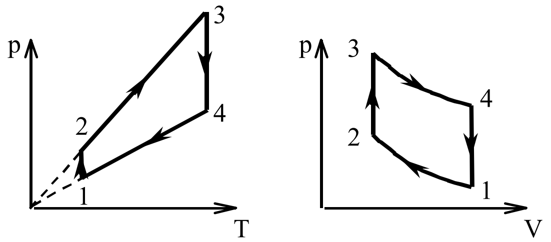

Рис.3.2

16. Див.рис.3.3.

17. 500 К.

18. $A=\frac{(p_0S+mg)V\Delta T}{ST}$.

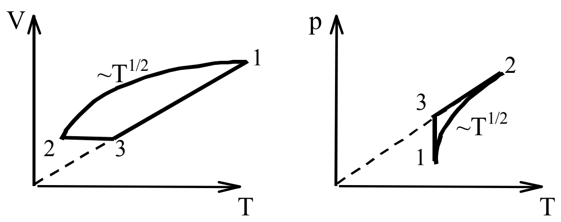

Рис.3.3.

19. $\Delta U=\dfrac{m}{M}C_V T_0\left[2^{\frac{R}{C_V}}-1\right]$.

20. $\Delta Q=\dfrac{3}{2}p_1V_1\left(\dfrac{V_1}{V_2}-1\right)\approx -3.03\cdot 10^2$ Дж ,

$\Delta U=\dfrac{5}{2}p_1V_1\left(\dfrac{V_1}{V_2}-1\right)\approx -5.05\cdot 10^2$ Дж .

21. $Q_x=Q-(p_2-p_1)(V_2-V_1)$. **22**. $\Delta U=\dfrac{5}{2}(p_3V_2-p_1V_1)$,

$A=p_1(V_2-V_1)$, $Q=\Delta U+A$. **23**. $\Delta T=\dfrac{TA}{pV}$.

24. $A=Q=\dfrac{m}{M}R(T_1+T_3-T_2-T_4)$, $\Delta U_{13}=\dfrac{5}{2}\dfrac{m}{M}R(T_3-T_1)$.

25. $A=\dfrac{1}{2}\alpha V_0^2(\eta^2-1)$, $\Delta U=\dfrac{\alpha}{\alpha-1}V_0^2(\eta^2-1)$, $C_M=\dfrac{R(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}$.

26. $T_н^/=\dfrac{T_х T_н}{2T_х-T_н}=624$ К . **27**. $\eta=\dfrac{(\gamma-1)(T_1-T_2)\ln\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)}{(\gamma-1)T_1\ln\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)+(T_1-T_2)}$.

28. $\gamma=1+\dfrac{pV}{Tc_V}\approx 1.4$. **29**. $c_p=\dfrac{R}{M}\dfrac{c_p/c_V}{(c_p/c_V-1)}\approx 5.2\cdot 10^3\ \dfrac{Дж}{кг\cdot К}$,

$c_V=\dfrac{R}{M}\dfrac{1}{(c_p/c_V-1)}\approx 3.1\cdot 10^3\ \dfrac{Дж}{кг\cdot К}$. **31**. $p^2V=\text{const}$.

32. $(\upsilon_{кв})_{N_2}\approx 597$ м/с , $(\upsilon_{кв})_П\approx 1.7\cdot 10^{-4}$ м/с ,

$\langle\varepsilon_{пост}\rangle_{N_2}=\langle\varepsilon_{пост}\rangle_П\approx 8.3\cdot 10^{-21}$ Дж . **33**. $\langle\varepsilon_{повн}\rangle\approx 1.24\cdot 10^{-20}$ Дж ,

$\langle\varepsilon_{об}\rangle\approx 6.21\cdot 10^{-21}$ Дж . **34**. $\upsilon_{ім}=\sqrt{\dfrac{2kT}{m_0}}$, $\langle\upsilon\rangle=\sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m_0}}$.

35. $\upsilon_{\text{ім}} = \sqrt{\dfrac{2p_0}{\rho}} \approx 411\ \text{м/с}$. **36**. $T = \dfrac{M\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right)}{4R\ln\left(\dfrac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right)}$. **37**. $F = \dfrac{kT}{\Delta h}\ln\eta$.

38. $T = \dfrac{m_0 V^2}{3k}$. **39**. $h = \dfrac{kT}{g(m_2 - m_1)}\ln\left(\dfrac{n_{20}}{n_{10}}\right)$. **40**. $n = \exp\left(\dfrac{\Delta S}{\nu R}\right) \approx 6$.

41. $\Delta S = \nu\left(R\ln\alpha - C_V\ln\beta\right)$. **42**. $\Omega = \dfrac{N!}{(N-n)!n!}$, $P = \dfrac{N!}{2^N(N-n)!n!}$.

43. $\Delta S = -\dfrac{5mR}{2M}\ln n$. **44**. $\Delta S = \nu\left(2C_V + R\right)\ln\alpha$.

45. $\Delta S = cm\ln\left(\dfrac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1T_2}\right)$. **46**. а) $\eta \approx 0.95\%$; б) $\eta \approx 10\%$.

47. $V_к = 5.1\cdot10^{-3}\ \text{м}^3$. **48**. $p = \dfrac{0.4RT\rho_0}{M - 0.4\rho_0 b} - \dfrac{0.16\rho_0{}^2 a}{M^2} \approx 2.6\cdot10^7\ \text{Па}$.

49. $\Delta T = -\dfrac{a}{2C_V}\dfrac{(V_1 - V_2)^2}{(V_1 + V_2)V_1V_2}$. **50**. а) ≈37%; б) ≈23%.

51. $N = \dfrac{D^2}{6\sqrt{2}\sigma^2}$. **52**. $\dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{\alpha^3}{\beta}$.

53. $N_1 - N_2 = \dfrac{pS\Delta t}{k}\sqrt{\dfrac{R}{2M\pi}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{T_1}} - \dfrac{1}{\sqrt{T_2}}\right) \approx -1.1\cdot10^{26}$. **54**. 1.5%.

55. $\varphi = \dfrac{\eta\omega\pi R^4}{2Eh} \approx 1.41\ \text{рад}$. **56**. а) $d = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$; б) $d = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$; в) $d = a$.

57. $\rho = \dfrac{4M}{N_A a^3}$.

Додатки

1. Деякі фізичні константи

Гравітаційна стала	$\gamma = 6.672 \cdot 10^{-11}$ м$^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Стандартне прискорення вільного падіння	$g = 9.807$ м/с^2
Стала Авогадро	$N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Універсальна газова стала	$R = 8.314$ Дж/(моль $\cdot$ К)
Стала Больцмана	$k = 1.381 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Швидкість світла у вакуумі	$c = 2.998 \cdot 10^{8}$ м/с

2. Астрономічні величини

Космічне тіло	Середній радіус, м	Маса, кг
Сонце	$6.95 \cdot 10^{8}$	$1.99 \cdot 10^{30}$
Земля	$6.37 \cdot 10^{6}$	$5.98 \cdot 10^{24}$
Місяць	$1.74 \cdot 10^{6}$	$7.35 \cdot 10^{22}$

3. Десяткові префікси до назв одиниць

Т – тера, 10^{12}	г – гекто, 10^{2}	мк – мікро, 10^{-6}
Г – гіга, 10^{9}	д – деци, 10^{-1}	н – нано, 10^{-9}
М – мега, 10^{6}	с – санти, 10^{-2}	п – піко, 10^{-12}
к –кіло, 10^{3}	м – мілі, 10^{-3}	ф – фемто, 10^{-15}

4. Таблиця моментів інерції деяких тіл

Тіло	Вісь обертання проходить	Момент інерції
Однорідний стрижень довжиною l	Через центр маси перпендикулярно до бокової поверхні стрижня	$m\frac{l^2}{12}$
	Через кінець стрижня перпендикулярно до нього	$m\frac{l^2}{3}$
Прямокутна пластина зі сторонами a i b	Через центр маси перпендикулярно до площини пластини	$m\frac{a^2+b^2}{12}$
Суцільний циліндр радіусом r i висотою h	Через вісь циліндру	$m\frac{r^2}{2}$
	Через центр мас перпендикулярно до осі циліндру	$m\left(\frac{h^2}{12}+\frac{r^2}{4}\right)$
Суцільна куля радіусом r	Вздовж діаметру	$m\frac{2r^2}{5}$
	Вздовж дотичної до діаметру	$m\frac{7r^2}{5}$